UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES
Instituto de Ciencias Básicas

Álgebra Lineal

Isabel Arratia Zárate

Matrices y Sistemas de ecuaciones lineales

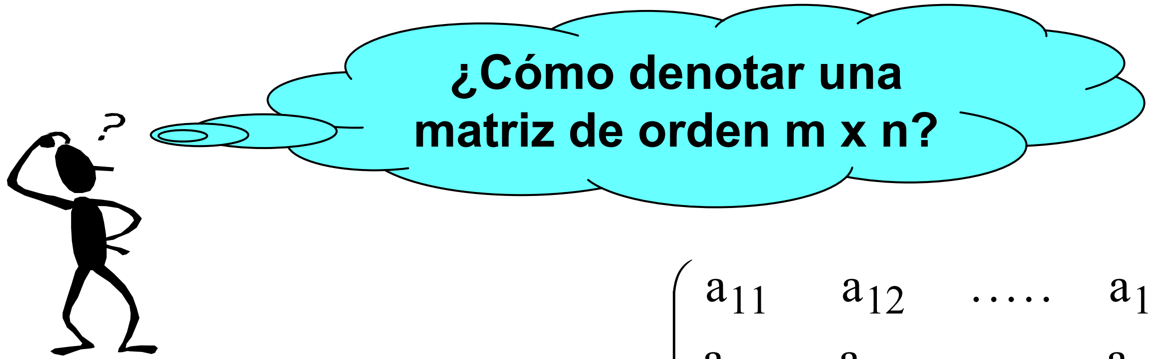
Matrices: definiciones y notaciones básicas

Una matriz A con componentes en un cuerpo $\mathbb{K}$ es un arreglo en filas y columnas de elementos de $\mathbb{K}$. Por ejemplo,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \sqrt{2} & -1 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2/3 \\ 15 & -3 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$$

son matrices con componentes en $\Re$, el cuerpo de los números reales. La matriz A tiene dos filas y tres columnas mientras que la matriz B tiene tres filas y dos columnas.

Si una matriz tiene m filas y n columnas, se dice que ella es de **orden m x n** (se lee m por n).



Se usan dos índices: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

lo que abreviadamente se expresa,

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots\ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

Ejercicio: Determine por extensión la matriz A, de orden 2x3 definida así, $a_{ij} = |\,2i - j\,|$.

El elemento a_{ij}, es el que se ubica en la i-ésima fila j-ésima columna de la matriz A; se llama **componente** ij de la matriz A.

Si la matriz A tiene el mismo número n de filas que de columnas, se dice que ella es una **matriz cuadrada de orden n**.

Si A es una matriz de orden n, las componentes a_{ii} constituyen la **diagonal de A**; se anota:

$$\operatorname{diag}(A) = (a_{11},\ a_{22},\ \ldots\ldots\ldots, a_{nn})$$

La suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada de orden n se llama **traza de A**, es decir,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice **matriz diagonal** si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ son matrices diagonales.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para i > j, y se llama **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para i < j. Por ejemplo,

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$ son matrices triangulares.

Ejemplo: Determine por extensión la matriz $A = (a_{ij})$, de orden 3 dada por

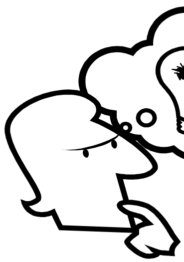
$$A = \begin{cases} i & \text{si} \quad i = j \\ 2i - j & \text{si} \quad i < j \\ |i - 3j| & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

¿Cuál es la diagonal y la traza de A ¿Cuál es el valor de la traza de A si la matriz A fuese de orden 20? ¿y si fuese de orden n?

Solución: La matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Su diagonal es diag(A) = (1, 2, 3) y tr(A) = 6. Si A es de orden 20, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{20} a_{ii} = 210$ y si es de orden n, $\operatorname{tr}(A) = \dfrac{n(n+1)}{2}$



Resulta fácil comprender la utilidad que prestan las matrices para ordenar datos.

La producción semanal, en cientos, de los artículos p_1, p_2, ….p_{60} que se fabrican en una industria se pueden expresar mediante una matriz P de 60 filas - donde se escribirán los productos elaborados - y 5 columnas que indicarán los días de la semana de lunes a viernes:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{Lu} & \text{Ma} & \text{Mi} & \text{Ju} & \text{Vi} \end{array} \\
P = & \left(\begin{array}{ccccc}
2 & 3{,}5 & 3 & 3{,}2 & 3 \\
6 & 6{,}5 & 6{,}3 & 6{,}2 & 6 \\
.. & .. & .. & .. & .. \\
.. & .. & .. & .. & .. \\
4 & 3{,}8 & 3{,}5 & 4 & 3{,}2
\end{array}\right)
\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ .. \\ .. \\ p_{60} \end{array}
\end{array}
$$

El conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con componentes en el cuerpo κ será denotado por $M_{mxn}(\kappa)$ y será $M_n(\kappa)$ cuando se trate de matrices cuadradas de orden n.

Dos matrices $A = (a_{i\,j})$ y $B = (b_{i\,j})$ son **iguales** si tienen el mismo orden y además $a_{i\,j} = b_{i\,j}$, $\forall i\,j$.

Si $A = (a_{i\,j})$ es una matriz de orden m x n, la **transpuesta de A**, denotada por A^t, es la matriz de orden n x m que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas de A. En consecuencia,

$$A^t = (a_{ji})$$

Ejercicio: ¿Cuál es la transpuesta de la matriz $A = (a_{ij})$ de orden 3 x 2 definida por $a_{ij} = 3i - j^2$?

Sea $A = (a_{ij})$ matriz cuadrada. Se dice que A es una **matriz simétrica** si $A^t = A$ y se dice que A es **antisimétrica si** $A^t = -A$, donde -A es la matriz $-A = (-a_{ij})$.

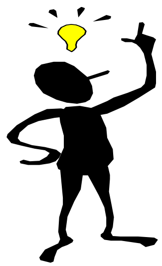
Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica.

Construya usted una matriz antisimétrica de orden 3.

Ejercicio: Si A es una matriz de orden n antisimétrica, demuestre que diag(A) = (0, ... , 0) y tr (A) = 0.

Ejercicios:

1) Determine por extensión la matriz $A = (a_{ij})$ de orden 4 definida como sigue. Calcule la traza de A. ¿Es A una matriz simétrica?



$$A = \begin{cases} i^2 - 7 & \text{si} \quad i = j \\ i - j + 3 & \text{si} \quad i = j - 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

2) Demuestre que toda matriz diagonal es simétrica.

3) Determine todos los valores reales de a y b de modo que la matriz B dada sea simétrica.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & a + 6 & 3 \\ a^2 & -5 & b + 2 \\ 3 & -b^3 & -1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Se llama **matriz nula (o matriz cero) de orden m x n** a la matriz de orden m x n que tiene todas sus componentes iguales a $0 \in \kappa$

La matriz nula se denotará por O_{mxn} o simplemente O.

Suma de matrices

Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{mxn}(\kappa)$, la suma de A y B es la matriz $A + B = (c_{ij}) \in M_{mxn}(\kappa)$, donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 6 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -2 & 6 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$

Observe que para sumar matrices, ellas deben ser del mismo orden. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\forall A, B, C \in M_{mxn}(\kappa)$
2. $A+B = B+A$, $\forall A, B \in M_{mxn}(\kappa)$
3. Existe O_{mxn} , matriz nula, tal que $A+O = A$, $\forall A \in M_{mxn}(\kappa)$
4. Para cada matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$, existe $-A \in M_{mxn}(\kappa)$ tal que $A+(-A) = O$, donde $-A=(-a_{ij})$ cuando $A=(a_{ij})$
5. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, $\forall A, B \in M_n(\kappa)$
6. $(A+B)^t = A^t + B^t$, $\forall A, B \in M_{mxn}(\kappa)$
7. A, B diagonales $\Rightarrow$ A+B diagonal
8. A, B simétricas $\Rightarrow$ A+B simétrica
9. A, B antisimétricas $\Rightarrow$ A+B antisimétricas

Ejercicio: Demuestre las propiedades enunciadas antes.

Multiplicación por escalar o ponderación

Si $A=(a_{i\,j})\in M_{mxn}(\kappa)$ y $\alpha\in\kappa$, la multiplicación α veces A es la matriz de orden m x n, $\alpha A=(\alpha\cdot a_{i\,j})$

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}-3 & 15\\ 4 & 12\\ -6 & 20\end{pmatrix}$, entonces $\frac{1}{3}A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ \frac{4}{3} & 4\\ -2 & \frac{20}{3}\end{pmatrix}$

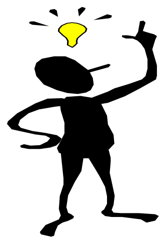
Se puede establecer que:

1. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A,\ \forall\alpha,\beta\in\kappa,\ \forall A$ matriz
2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\ \forall\alpha,\beta\in\kappa,\ \forall A,B\in M_{mxn}(\kappa)$
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\ \forall\alpha\in\kappa,\ \forall A,B\in M_{mxn}(\kappa)$
4. $1\cdot A=A,\quad (-1)A=-A,\quad 0\cdot A=O,\ \forall A$ matriz

Además 5. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \cdot \operatorname{tr}(A), \quad \forall A \in M_n(\kappa)$

6. $(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t, \forall A \in M_{mxn}(\kappa)$

Ejercicio: **Demuestre las propiedades 1. a 6. anteriores.**



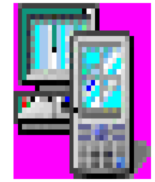
Las propiedades algebraicas de las matrices nos permiten resolver ecuaciones matriciales de manera eficiente.

Ejercicio: **Resuelva la ecuación**

$$5(X + A) = A^t - \tfrac{1}{3}(B - 9X^t)^t$$

si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad C^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Problema: Un fabricante produce tres modelos de zapatillas de descanso A, B y C en tres tamaños: para niños, damas y caballeros. La fabricación se realiza en dos plantas, una ubicada en San Bernardo y la otra en Maipú. La producción semanal, en pares de zapatillas, en cada planta se entrega a través de las matrices:



San Bdo.	Niños	Damas	Varones
A	20	34	30
B	16	20	48
C	24	28	32

Maipú	Niños	Damas	Varones
A	16	24	26
B	10	14	32
C	15	20	28

a) Determine la matriz que contiene los datos relativos a la producción semanal total de cada modelo de zapatilla en ambas plantas.

b) Si la producción en la planta de San Bernardo se incrementa en un 20% y la de Maipú en un 40%, escriba la matriz que representa la nueva producción semanal total de cada tipo de zapatilla.

La multiplicación de matrices

Si $A=(a_{ij})\in M_{mxn}(\kappa)$ y $B=(b_{ij})\in M_{nxr}(\kappa)$, la multiplicación de A y B es la matriz $AB=(c_{ij})$, de orden m x r, donde

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

El elemento ubicado en la fila i columna j del producto AB es:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots\ldots+a_{in}b_{nj}$$

Componentes de la fila i

Componentes de la columna j

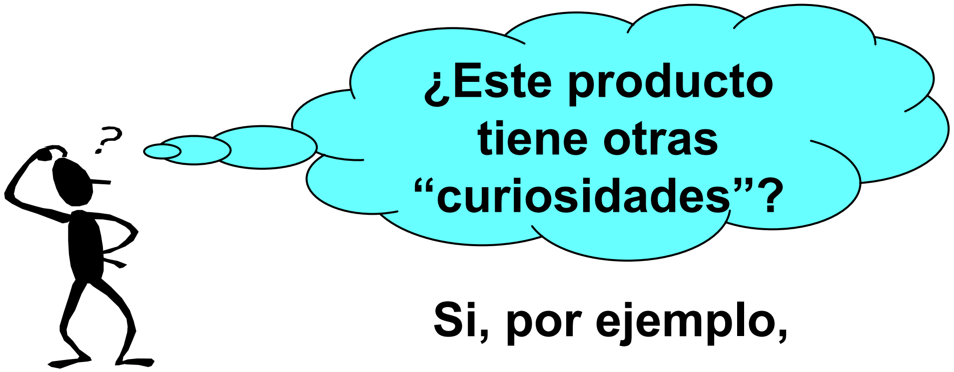
Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\text{entonces} \quad AB = \begin{pmatrix} 15 & -16 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$$

Observe que en este ejemplo, BA también se puede realizar pero es una matriz de orden 3, con lo que concluimos que

La multiplicación de matrices no es conmutativa

Note también que para la matriz A del ejemplo anterior, el producto $A^2 = A \cdot A$ no se puede efectuar.



Si, por ejemplo,

- Existen matrices cuadradas A, no nulas pero tales que $A^2 = O$
- Más aún, existen matrices A y B, de orden n, no nulas, distintas y AB = O, es decir, el producto de dos matrices puede ser la matriz cero y ninguna de ellas ser cero.

Por lo tanto,

$$AB=0 \not\Rightarrow (A=0 \vee B=0)$$

$$AB=AC \not\Rightarrow B=C$$

Sin embargo, siempre que las operaciones se puedan realizar, se puede demostrar que:

1. (A B) C = A (B C)
2. (A + B) C = A C + B C y C (A + B) = C A + CB

Surge la interrogante ¿Existe elemento identidad en el conjunto $M_{mxn}(\kappa)$?

La matriz cuadrada $I_n = (a_{ij})$ de orden n definida así:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

se llama matriz identidad; ella es tal que

$$A \cdot I_n = A = I_n \cdot A\,, \quad \forall A \in M_n(\kappa)$$

En consecuencia, existe elemento identidad en $M_n(\kappa)$.

Ejercicio: a) Muestre con ejemplos que, en general,

$$tr(AB) \neq tr(A)tr(B) \quad \text{y que} \quad (AB)^t \neq A^t B^t$$

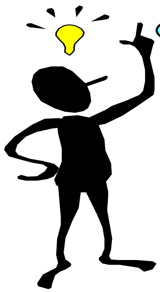
b) Demuestre que $tr(AB) = tr(BA)$

c) Demuestre que, siempre que los productos se puedan realizar, $(A\,B)^t = B^t A^t$.

Ejercicio: Determine la matriz X de modo que la siguiente igualdad resulte verdadera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Dadas las matrices A y B,
¿qué necesitamos para
resolver la ecuación AX = B?**



La ecuación $ax = b$, en el conjunto de los números reales, se resuelve usando el inverso multiplicativo de a:

$$x = a^{-1}b = \frac{b}{a}$$

Si A es una matriz no nula nos preguntamos ¿existe una matriz B tal que AB = I_n = BA? Que equivale a ¿existe el inverso multiplicativo de A? Observe que esta pregunta tiene sentido sólo si A es una matriz cuadrada. Sin embargo, aunque A sea cuadrada, la respuesta a la interrogante es no siempre.

Por ejemplo para $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ investiguemos la existencia de tal matriz B.

Supongamos que $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es tal que AB = I_2; entonces

$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que equivale a $\begin{pmatrix} 3a+6c & 3b+6d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y a resolver $a + 2c = \frac{1}{3}$ y $a + 2c = 0$.

Concluimos que no existen a y c; de manera análoga, no existen b y d. Por lo tanto la matriz B no existe.

Surge entonces la siguiente definición:

Se dice que una matriz $A \in M_n(\kappa)$ es **invertible o no singular** si existe $B \in M_n(\kappa)$ tal que $AB = I_n = BA$. La matriz B, cuando existe, está únicamente determinada por A, se llama **inversa de A** y se denota por A^{-1}.

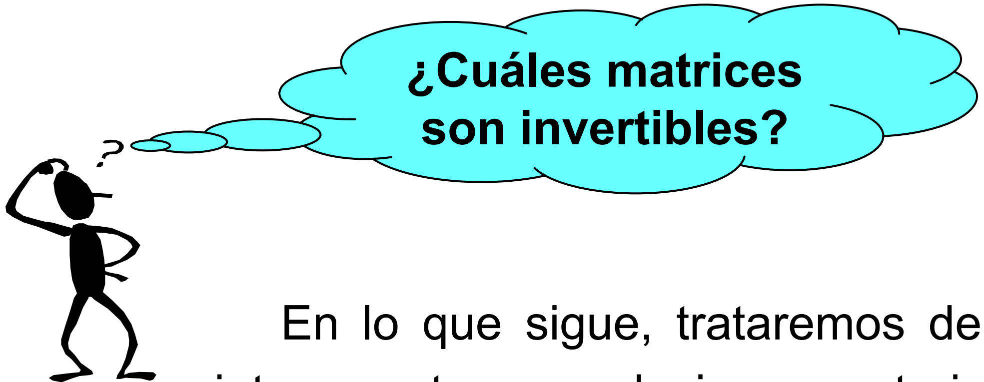
Por lo tanto, $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$

Ejercicio: Demuestre que,

a) $(A^{-1})^{-1} = A, \ \forall A \in M_n(\kappa)$ invertible

b) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \ \forall A \in M_n(\kappa)$ invertible

c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \ \forall A, B \in M_n(\kappa)$ invertibles



En lo que sigue, trataremos de contestar esta interrogante, es decir, caracterizaremos a las matrices invertibles. Además mostraremos maneras de calcular la inversa.

Una primera respuesta la obtendremos a través de los determinantes que comenzaremos a estudiar a continuación.

Determinantes

Asociado a cada matriz $A \in M_n(\kappa)$ existe un elemento de κ, su determinante, que lo denotaremos det(A) o | A | .

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\kappa)$, det(A) = ad – bc ; por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5$$

Si A es una matriz cuadrada de orden mayor que 2, el determinante de A se define en forma recursiva como sigue:

Sea $A = (a_{ij})$ matriz de orden n. Llamaremos **menor de orden ij** de A, y anotaremos M_{ij}, al determinante de orden n -1 que se obtiene a partir de A, eliminándole la i-ésima fila y la j-ésima columna.

El **cofactor de orden ij** de A, denotado C_{ij} es el número

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$, $M_{13} = 2,\quad M_{32} = 1$

$$C_{13} = 2 \quad \text{y} \quad C_{32} = -1$$

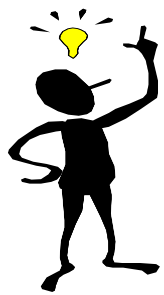
El **determinante de la matriz de orden n,** $A = (a_{ij})$ es el número

$$\det(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} & \text{con} \quad 1 \le j \le n \quad \text{fijo} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} & \text{con} \quad 1 \le i \le n \quad \text{fijo} \end{cases}$$

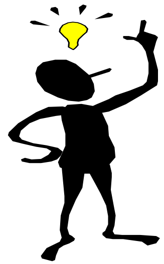
Por ejemplo, calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Fijando i = 1 tenemos que:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = M_{11} - 3M_{12} - 9M_{13} = -20 - 12 + 72 = 40$$



- Observe que el fijar i = 1 significó que al desarrollar la sumatoria intervinieron los elementos y los correspondientes menores (o cofactores) de la fila 1.
- El determinante det(A) = 40 se pudo haber obtenido por seis caminos diferentes. ¿Cuál de ellos es el que necesita menos cálculos?



De la definición dada para los determinantes siguen las siguientes **propiedades**:

1. det(A) = det(A^t). En consecuencia, las propiedades de los determinantes demostradas para las filas, son también válidas para las columnas. Y recíprocamente.
2. Si todos los elementos de una fila (o columna) de la matriz A son cero, det(A) = 0.
3. det(I_n) = 1, $\forall n \in \mathrm{IN}$. En efecto, es claro que det(I_2) = 1. Supongamos que det(I_k) = 1, para $k \in \mathrm{IN}$. Entonces,

$$\det(I_{k+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det(I_k) = 1$$

Del mismo modo, usando un razonamiento inductivo, podemos establecer que

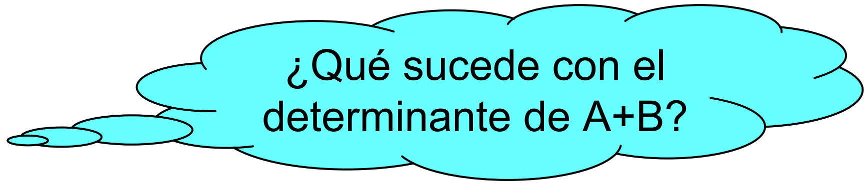
4. Si A es una matriz diagonal o triangular, det(A) es igual al producto de los elementos de la diagonal.
5. Si dos filas (o columnas) adyacentes de A son iguales, entonces det(A) = 0.

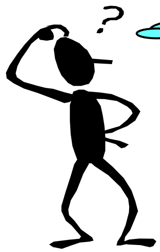
Esta propiedad nos permite demostrar que:

6. Si dos filas adyacentes o columnas adyacentes de A se intercambian, se produce un cambio de signo del determinante.

Lo que nos permite ampliar la propiedad 5:

7. Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces det(A) es igual a 0.





En general, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Sin embargo, existe una propiedad que la enunciaremos en primer lugar para uno de los casos de orden 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b \\ a_2 + c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$$

8. Si $A \in M_n(\kappa)$ y $A^{(k)},\ 1 \leq k \leq n,$ denota la k-ésima columna de A, entonces

$$\det(A^{(1)}, \ldots, A_1^{(k)} + A_2^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) =$$
$$\det(A^{(1)}, \ldots, A_1^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) + \det(A^{(1)}, \ldots, A_2^{(k)}, \ldots, A^{(n)})$$

Respecto a la ponderación, en general,

$$\det(\alpha A) \neq \alpha \cdot \det(A)$$

Pero, utilizando la notación de la propiedad 8, se tiene que

9. $\det(A^{(1)}, \ldots, \alpha A^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) = \alpha \det(A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}, \ldots, A^{(n)})$

Y como consecuencia, $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

10. Si A y B son matrices de orden n, se puede demostrar que

$$\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$$

11. Finalmente una propiedad que será de mucha utilidad:
Si las componentes de una fila (o columna) de A se multiplican por un número $\alpha \in \kappa$ y los resultados se suman a los elementos correspondientes de otra fila (o columna), el valor del determinante no se altera. Es decir,

$$\det(A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}, \ldots, A^{(j)} + \alpha A^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) = \det(A)$$

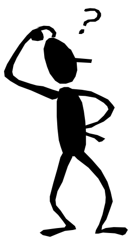
Si la fila i multiplicada por el número α la sumamos a la fila j, anotaremos $\alpha F_i + F_j$.

Para calcular el siguiente determinante usaremos la operación $-2F_1 + F_2$; a continuación la operación $-4F_1 + F_3$ y luego desarrollaremos el determinante a través de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 4 & -12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 19$$

Ejercicio: Calcule los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a+b & b \\ 1 & a+c & c \\ 1 & a+d & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$



Ejercicio: Clasifique las siguientes afirmaciones como verdaderas o falsas:

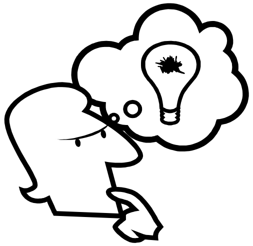
1. $\det(A^2 - B^2) = \det(A+B)\cdot\det(A-B), \quad \forall A, B \in M_n(\kappa)$
2. $\det(A + I_2) = \det(A) + \det(I_2) \quad \Leftrightarrow \quad tr(A) = 0$
3. $\det(\text{-}A) = \text{-}\det(A), \quad \forall A \in M_n(\kappa)$

Definición: La matriz **adjunta** de $A = (a_{ij}) \in M_n(\kappa)$, es la transpuesta de la matriz de los cofactores de A , es decir,

$$\mathrm{adj}(A) = ((-1)^{i+j} M_{ij})^t = (C_{ij})^t = (C_{ji})$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

¿Cuál es la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? La matriz de los cofactores de A es $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -6 & -12 & 6 \end{pmatrix}$; luego $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 9 & 2 & -12 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$



Observe que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$,

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$y \quad adj(A) \cdot A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Y si el determinante de A es distinto de cero tenemos que,

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} adj(A) \right) = I_2 = \left(\frac{1}{\det(A)} adj(A) \right) \cdot A$$

Este resultado es más general; se puede demostrar que si $A \in M_n(\kappa)$ y det(A) es distinto de cero, entonces

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right) = I_n = \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right) \cdot A$$

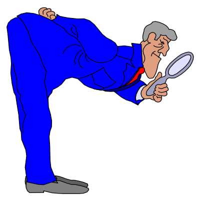
es decir, A es invertible y se tiene que $A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right)$

Recíprocamente, si A es invertible, entonces

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

y por lo tanto, $\det(A) \neq 0$.

Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente teorema que caracteriza a las matrices invertibles:



Teorema: Sea $A \in M_n(\kappa)$; entonces

A invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

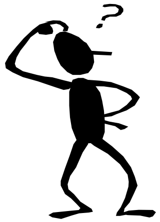
Y en este caso se tiene que $A^{-1} = \left(\dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right)$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$, y $ad - bc \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Calcule la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$



Ejercicio: **Es verdadero o falso que para matrices A, B invertibles de orden n se tiene que:**

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

2. $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. $(A^{-1})^{-1} = A$

Ejercicio: **Determine todos los valores reales de k de modo que las siguientes matrices sean invertibles:**

$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2k \\ 3 & 1 & k-2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales – Matrices escalonadas

Para una matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$ consideraremos las siguientes **"operaciones elementales con las filas de A"**:

- **Permutar dos filas**: Si se permuta la fila i con la fila j anotamos

$$F_{ij}$$

- **Multiplicar una fila por un número real**: Si se multiplica la fila i por el número $\alpha \neq 0$, esta operación se anota

$$\alpha F_i$$

- **Sumar dos filas**: Si la fila i se suma a la fila j, anotamos

$$F_i + F_j$$

- Finalmente, podemos combinar las dos últimas operaciones y obtener $\alpha F_i + F_j$

Ejercicio: Verifique que si se realizan las operaciones elementales indicadas con las filas de la matriz A, se obtiene la matriz E.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \;\; F_{12}, \;\; -2F_1 + F_2, \;\; F_1 + F_3, \;\; F_{23}, \;\; 2F_2 + F_3, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A,\ B \in M_{mxn}(\kappa)$ y si B se obtiene realizándole a la matriz A un número finito de operaciones elementales, entonces se dice que **A es equivalente a B** y se anota $A \approx B$. Por ejemplo, las matrices A y E del ejercicio anterior son equivalentes.

La matriz E del ejercicio anterior tiene una forma muy particular, es una matriz del tipo escalonada. A continuación damos una definición de matriz escalonada:

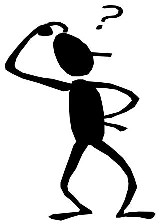
Una matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$ se llama **matriz escalonada** si satisface las siguientes condiciones:

- Las filas que tengan todas sus componentes iguales a cero deben estar ubicadas debajo de aquellas que tengan componentes no nulas.
- La primera componente no nula de cada fila no nula es 1, vista de izquierda a derecha. Esta componente se llama “uno distinguido o uno capital”.
- El número de ceros al comienzo de una fila aumenta a medida que se desciende en la matriz.

Si además A satisface lo siguiente:

- Todas las componentes de la columna donde aparece un 1 distinguido son ceros,

la matriz A se llama **escalonada reducida por filas**.

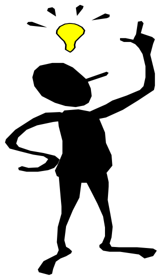


Ejercicio: **Decida si las siguientes matrices son o no son escalonadas. ¿Son escalonadas reducidas por filas?**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Teorema: Toda matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$ es equivalente a una matriz $E \in M_{mxn}(\kappa)$ del tipo escalonada reducida por filas.

Si $A \in M_{mxn}(\kappa)$, entonces $A \approx E$, con E matriz escalonada reducida por filas. Se define el **rango de A** como el número de filas no nulas de E, que equivale al número de “unos distinguidos” de E. El rango de A lo denotaremos por **r(A)**.



El rango de la matriz nula es cero: r(O) = 0.

El rango de la matriz identidad de orden n es n: $r(I_n) = n$

El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es 2. ¿Por qué?

Ejercicio: Determine todos los valores reales de a de modo que el rango de la matriz M sea 3 si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Estudie el rango de la matriz A, dependiendo de los valores reales de k si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Un teorema que caracteriza a las matrices invertibles es:

Teorema: Sea $A \in M_n(\kappa)$; entonces

$$A \text{ invertible} \iff r(A) = n \iff A \approx I_n$$

Y si una sucesión de operaciones elementales fila reducen A a la matriz identidad I_n, entonces esa misma sucesión de operaciones elementales fila cuando se aplican a I_n proporcionan A^{-1}.

Ejercicio: **Aplique la última parte del teorema para calcular la inversa de cada una de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Las operaciones elementales también se pueden realizar con las columnas de la matriz.

Sin embargo, para los objetivos de este curso, usaremos sólo operaciones elementales con las filas de la matriz.

Ejercicio: **Determine el rango de la siguiente matriz compleja:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Una **matriz elemental** es aquella que se obtiene al realizar una operación elemental a la matriz identidad I_n.

Usaremos las siguientes notaciones para las matrices elementales:

$$E_{ij} \quad : \text{ se obtiene al realizar } F_{ij} \text{ a } I_n$$

$$E_i(\alpha) \quad : \text{ se obtiene al realizar } \alpha F_i \text{ a } I_n$$

$$E_{ij}(\alpha) : \text{ se obtiene al realizar } \alpha F_i + F_j \text{ a } I_n$$

Por ejemplo, para orden 3,

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{13}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observaciones

(1) Existe una equivalencia entre realizar a la matriz A una operación elemental fila y multiplicar, por la izquierda, la matriz A por una matriz elemental. A saber,

$E_{i\,j} \cdot A$	corresponde a realizar a A la operación elemental				$F_{i\,j}$
$E_i(\alpha) \cdot A$	"	"	"	"	$\alpha\, F_i$
$E_{i\,j}(\alpha) \cdot A$	"	"	"	"	$\alpha F_i + F_j$

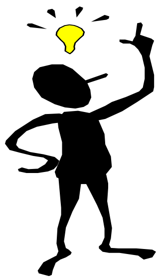
(2) Las matrices elementales son invertibles; en efecto,

$$E_{i\,j} \cdot E_{i\,j} = I_n$$

$$E_i(\alpha) \cdot E_i(\tfrac{1}{\alpha}) = I_n$$

$$E_{i\,j}(\alpha) \cdot E_i(-\alpha) = I_n$$

(3) La inversa de una matriz elemental es también una matriz elemental.



Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema enunciado antes y que caracteriza a las matrices invertibles.

Teorema: Sea $A \in M_n(\kappa)$; entonces

A invertible $\Leftrightarrow$ $A \approx I_n$

i) Supongamos que A es invertible y que $A \approx E$, con E matriz escalonada reducida por filas, $E \neq I_n$. Entonces E tiene por lo menos una fila de ceros y por tanto det(E) = 0.

Pero si $A \approx E$, el determinante de A difiere del determinante de E en el signo o en un factor numérico. En cualquier caso concluimos que det(A) = 0, lo que es una contradicción. Por lo tanto se debe tener $A \approx I_n$.

i) Supongamos que $A \approx I_n$; entonces I_n se obtiene realizando una sucesión de operaciones elementales fila a la matriz A. Esto quiere decir que $E_k \; E_{k-1} \; . \; . \; . \; . \; E_2 \; E_1 \; A = I_n$, con $E_1, \; . \; . \; . \; E_k$ matrices elementales. Como las matrices elementales son invertibles podemos expresar

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots . \cdot E_k^{-1}$$

$$\Rightarrow \; \det(A) = \det(E_1^{-1}) \cdot \ldots . \cdot \det(E_k^{-1})$$

$$\Rightarrow \; \det(A) \neq 0$$

$$\Rightarrow \; A \quad \text{invertible}$$

Del teorema siguen los siguientes corolarios:

(1) $A \in M_n(\kappa)$ A invertible $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

(2) $A \in M_n(\kappa)$ **,** A invertible $\Leftrightarrow$ A es producto de matrices elementales.

Esto último sugiere otro método para calcular la inversa de A:

$$\boxed{E_k \cdot \ldots\ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = E_k \cdot \ldots\ldots \cdot E_2 \cdot E_1}$$

Además, prueba el enunciado hecho antes: *Si una sucesión de operaciones elementales fila reducen A a la matriz identidad* I_n*, entonces esa misma sucesión de operaciones elementales fila cuando se aplican a* I_n *proporcionan* A^{-1}*.*

Ejercicio: Exprese la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **como producto de matrices elementales.**

Factorización LU

Sea $A \in M_n(\kappa)$. Si al escalonar A no es necesario realizar permutación de filas, entonces A puede factorizarse como el producto LU donde:

- L es una matriz triangular inferior con todos los elementos de su diagonal iguales a 1.
- U es una matriz triangular superior con los elementos pivotes en la diagonal.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite factorización LU. En efecto,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ cx & cy + dz \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad ax = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a = 0 \quad \vee \quad x = 0)$$

$$\Rightarrow \quad L \quad o \quad U \quad \text{no invertible}$$

$$\Rightarrow \quad A \quad \text{no invertible}$$

Lo que es una contradicción pues det(A) = -1.

Este ejemplo muestra que,

$$\boxed{A \quad \text{invertible} \quad \not\Rightarrow \quad A \ \text{admite factorización LU}}$$

Ejemplo: Encontremos la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{-F_1+F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{-F_2+F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

Lo anterior se expresa con matrices elementales así:

$$E_{23}(-1) \cdot E_{13}(-1) \cdot A = U$$

$$\Rightarrow \quad A = (E_{23}(-1))^{-1} \cdot (E_{13}(-1))^{-1} \cdot U$$

$$\Rightarrow \quad A = E_{13}(1) \cdot E_{23}(1) \cdot U$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \quad \mathbf{U}$$

Efectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De lo realizado se puede concluir que la factorización LU de una matriz A no es única.

Ejercicio: Encuentre una descomposición LU para las matrices A y B siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se expresa

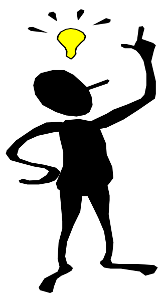
$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\Re)$ es la **matriz de los coeficientes** del sistema y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots\ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ son las (matrices) columnas de **incógnitas** y de **términos constantes** respectivamente.

Los números reales $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, formalmente $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$

que satisfacen cada una de las ecuaciones de (*) forman una **solución del sistema** (*).

El sistema (*) se dice **compatible** si posee al menos una solución y se dice **incompatible** cuando no tiene solución.



Observe que el sistema (*) equivale a la ecuación matricial AX = B, con A la matriz de orden m x n formada con los coeficientes del sistema, X la matriz columna de incógnitas y B la matriz columna de términos constantes.

Ejercicio: **Escriba la ecuación matricial AX = B que representa a los sistemas:**

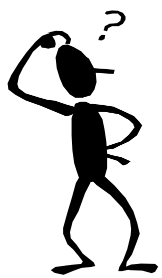
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 & = & -1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Ejercicio: **Escriba el sistema de ecuaciones lineales AX = B que corresponde a las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

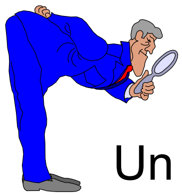
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Problema: **Haga el planteamiento matemático del siguiente problema: Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas, estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de una unidad de cada uno de los cuatro productos está dado en la tabla.**



	Prod 1	Prod 2	Prod 3	Prod 4
Máq 1	1	2	1	2
Máq 2	2	0	1	1
Máq 3	1	2	3	0

¿Cuántas unidades de cada producto se deben producir en un día, con el fin de usar plenamente las máquinas?



Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales se dice **homogéneo** cuando la columna de términos constantes está formada sólo por ceros.

Sea $AX = O$, con $A \in M_{mn}(\Re)$ un sistema homogéneo; entonces:

1. $AX = O$ es siempre compatible pues $X = O$ es solución de él.
2. Si $E \in M_{mn}(\Re)$ es tal que $A \approx E$, entonces los sistemas (equivalentes) $AX = O$ y $EX = O$ tienen las mismas soluciones.
3. Si el rango de A, $r(A) = n$, entonces $X = O$ es la única solución de $AX = O$.
4. Si el rango de A, $r(A) < n$, entonces existen infinitas soluciones para $AX = O$. Estas se pueden expresar en términos de uno o más parámetros.

Resolución de sistemas homogéneos

Ejemplo 1

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

La matriz de este sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Con A, realizamos operaciones elementales fila hasta obtener E

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Como r(A) = 3 = N° columnas de A = N° de incógnitas, el sistema tiene solución única y ésta es la misma que tiene EX = O, es decir,

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, que nos permitimos escribir S = (0, 0, 0)

Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ -1x_1 - 7x_2 + 15x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & -7 & 15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Como r(A) = 2 < N° columnas de A (N° de incógnitas), el sistema tiene infinitas soluciones. Estas las buscamos en el sistema EX = O:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & 2x_3 \end{array}\right|$$

Asignamos a x_3 el parámetro λ con el fin de expresar las infinitas soluciones así:

$$S = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda;\ \lambda \in \Re.$$ O también, $S = (1, 2, 1)\ \lambda,\ \lambda \in \Re$

Ejemplo 3: Resolvamos el sistema de 4 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y + 4z + 5u & = & 0 \\ 2x + 3y - 7z & = & 0 \end{array}\right|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -15 & -10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = E$$

En este caso, r(A) = 2 < N° columnas de A (N° de incógnitas) y el sistema tiene infinitas soluciones. El sistema equivalente EX = O es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + z + 3u & = & 0 \\ y - 3z - 2u & = & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & -z - 3u \\ y & = & 3z + 2u \end{array}\right|$$

Asignamos dos parámetros: $z = \lambda$, $u = \mu$. Las infinitas soluciones se expresan:

$$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu ;\ \lambda ,\ \mu \in \Re.$$

O también, $S = (-1, 3, 1, 0)\lambda + (-3, 2, 0, 1)\mu;\ \lambda, \mu \in \Re$

Ejemplo 4: Determinemos todos los valores de k de modo que el siguiente sistema tenga soluciones distintas de X=O, es decir, soluciones no triviales.

$$\begin{array}{rcl|} 5x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ x_2 + (k-1)x_3 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

El sistema tendrá soluciones no triviales si y sólo si r(A) < 3 = N° columnas de A (N° de incógnitas del sistema).

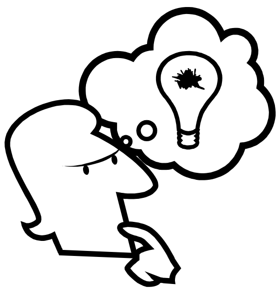
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix} = E$$

Por lo tanto el valor de k buscado es k = 3, en cuyo caso las múltiples soluciones del sistema se pueden expresar:

$$(-1,\ -2,\ 1)\lambda\ ;\quad \lambda \in \Re$$

Ejercicio: **Determine todos los valores reales de k de modo que el siguiente sistema tenga soluciones no triviales:**

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + kx_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$



Ejercicio: **¿Para qué valores del número real a, el sistema AX = O tiene solución única? Aquí A es la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos

Consideremos el sistema no homogéneo AX = B, de m ecuaciones lineales con n incógnitas, donde $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\Re)$ y

$$B = (b_1,\ b_2, \ldots\ldots, b_m)^t \in M_{mx1}(\Re)$$

Llamaremos **matriz ampliada** (o matriz aumentada) del sistema AX = B a:

$$A = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Se tiene que:

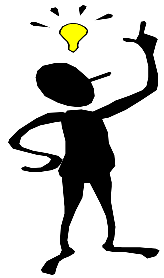
$\boxed{\text{El sistema } AX = B \text{ es compatible si y sólo si } r(A) = r(A; B)}$

O equivalente,

El sistema $AX = B$ es incompatible si y sólo si $r(A) \neq r(A; B)$.

Supongamos que $AX = B$, sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es compatible.

1. Si $r(A) = r(A; B) = n$, entonces $AX = B$ tiene solución única.
2. Si $r(A) = r(A; B) < n$, entonces $AX = B$ tiene infinitas soluciones que se pueden expresar en términos de uno o más parámetros.



Si el sistema AX = B tiene n ecuaciones y n incógnitas, A es una matriz cuadrada de orden n. Y si el rango de A, r(A) = n, entonces r(A; B) también es n, A es invertible y la única solución del sistema la podemos encontrar a través de la inversa de A:

$$X = A^{-1}B$$

Ejercicio: En las condiciones anteriores, ¿por qué $X = BA^{-1}$ no es solución del sistema?

Ejercicio: Usando la inversa de la matriz del sistema, resuelva

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 & = & -2 \end{array}$$

Resolución de sistemas no homogéneos

Ejemplo 1: $\left.\begin{array}{rcr} x+4y-3z & = & -3 \\ 3x+6y-z & = & 1 \end{array}\right|$

$$(A;B)=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -5/3 \end{array}\right)$$

En este caso, r(A) = 2 = r(A; B) y el sistema es compatible. Como n = N° de incógnitas = 3, el sistema tiene infinitas soluciones; las buscamos en:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+\frac{7}{3}z & = & \frac{11}{3} \\ y-\frac{4}{3}z & = & -\frac{5}{3} \end{array}\right|$$

Soluciones: $(\frac{-7}{3},\ \frac{4}{3},\ 1)\lambda+(\frac{11}{3},\ \frac{-5}{3},\ 0);\ \ \lambda\in\Re$

Ejemplo 2: Estudiemos la compatibilidad del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ 5x_2 - x_3 & = & c \end{array}\right|$$

$$(A;B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 5 & -1 & c \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 5 & -1 & c \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b+c \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el rango de A es 2.

El sistema será compatible si y sólo si

$$r(A; B) = 2,$$

lo que equivale a que a, b, c deben cumplir,

$$2a - b + c = 0$$

Ejemplo 3: Determinemos los valores reales de m de manera que el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ mx_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = & -1 \end{array}\right|$$

i) Tenga solución única

ii) Posea múltiples soluciones

iii) Sea incompatible

$$(A;B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 1 & 1 & m & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-2 & -2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2m-2 & -3 \\ 0 & 1 & 2-m & 2 \\ 0 & 0 & (m-1)^2 & 2(1-m) \end{array}\right)$$

i) Para cualquier número real m, $m \neq 1$, r(A) = 3 = r(A; B) y el sistema tiene solución única. En este caso,

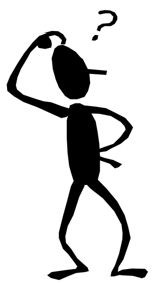
$$(A;B) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2(m-1) & -3 \\ 0 & 1 & 2-m & 2 \\ 0 & 0 & (m-1)^2 & 2(1-m) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{m-1} \end{array}\right)$$

Y la solución es: $S = \left(1,\ \frac{2}{m-1},\ \frac{-2}{m-1}\right), \quad m \neq 1$

ii) Si m = 1, $(A;B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **, r(A) = 2 = r(A; B) y el sistema tiene múltiples soluciones que se expresan:**

$$(0,\ -1,\ 1)\,\lambda + (-3,\ 2,\ 0)\,; \quad \lambda \in \Re$$

iii) Para ningún número real m, el sistema es incompatible.



Ejercicio: **Analice las soluciones del sistema**

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}\right|$$

dependiendo de los valores que tome el número real a.

Ejercicio: **Resuelva el sistema**

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + kx_2 + kx_3 &= 2k \\ x_1 + kx_2 - kx_3 &= k \end{aligned}\right|$$

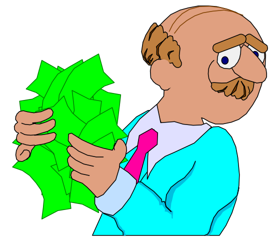
Para todos los valores reales de k para los cuales existen múltiples soluciones.

¿Para algún valor de k, el sistema resulta ser incompatible?

Problema: **Una persona invierte US$20.000 en tres diferentes negocios que proporcionan utilidades del 5%, 6% y 8% respectivamente.**

La ganancia anual total de las tres inversiones es US$1.266.

Determine la cantidad depositada en cada negocio si se sabe que la utilidad del negocio al 8% es igual a dos veces la ganancia que deja el negocio al 5%.



Determine la cantidad depositada en cada negocio si se sabe que la utilidad del negocio al 8% es igual a dos veces la ganancia que deja el negocio al 5%.

La Regla de Cramer

La Regla de Cramer nos proporciona un método para resolver ciertos sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Sea A matriz de orden n y consideremos el sistema de ecuaciones lineales AX = B. Si det (A) $\neq$ 0, entonces A es invertible y la única solución del sistema es $X = A^{-1}B$.

La Regla de Cramer nos entrega otra manera de hallar esta única solución de AX = B a través de los determinantes; asegura que,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

donde $\Delta = \det(A)$ y Δ_i es el determinante de la matriz que se obtiene al sustituir la i-ésima columna de A por la columna B de términos constantes.

Ejemplo: Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ mx_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = & -1 \end{array}\right|$$

para todos los valores de m que hacen que este sistema tenga solución única.

En este caso $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2$

Luego $\forall\, m \in \Re - \{1\}$, $\Delta = \det(A) \neq 0$ y el sistema tiene solución única. Calculemos la solución:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2} = \frac{2(m-1)}{(m-1)^2} = \frac{2}{m-1}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(m-1)^2} = \frac{-2(m-1)}{(m-1)^2} = \frac{-2}{m-1}$$

Solución: $S = \left(1, \frac{2}{m-1}, \frac{-2}{m-1}\right), \quad m \neq 1$

Problema: **Suponga que dos productos A y B compiten y que las demandas Q_A y Q_B de estos productos están relacionadas con sus precios p_A y p_B por las ecuaciones de demanda:**

$$Q_A = 17 - 2p_A + \frac{1}{2}p_B ,$$

$$Q_B = 207 - 3p_A + \frac{1}{2}p_B$$

Las ecuaciones de la oferta son:

$$p_A = 2 + Q_A + \frac{1}{3}Q_B ,$$

$$p_B = 2 + \frac{1}{2}Q_A + \frac{1}{4}Q_B$$

que indican los precios a los cuales las cantidades estarán disponibles en el mercado. En el punto de equilibrio del mercado las cuatro ecuaciones deben satisfacerse. Calcule los valores de equilibrio de Q_A, Q_B, p_A y p_B.

Sistemas lineales y factorización LU

Consideremos el sistema $AX = B$, donde A es una matriz de orden n que admite una descomposición LU. Si $AX = B$ tiene solución única, ésta se puede obtener de la manera que se indica a continuación:

$$\boxed{AX = B \quad \Leftrightarrow \quad LU\,X = B \quad \Leftrightarrow \quad LY = B, \quad \text{con } Y = UX}$$

Ejemplo: Resolvamos el sistema

$$\begin{array}{rcr}
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & -2 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 4 \\
3x_1 + 4x_2 - x_3 & = & -1 \\
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 7
\end{array}$$

La matriz A del sistema admite una factorización LU así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}$$

Resolvemos L**Y** = B,

$$\left.\begin{array}{rcr} y_1 & = & -2 \\ -y_1 + y_2 & = & 4 \\ 3y_1 - 2y_2 + y_3 & = & -1 \\ 2y_1 + y_3 + y_4 & = & 7 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, resolvemos U **X** = Y,

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1+2x_2-x_3+x_4 & = & -2 \\ x_2+x_3 & = & 2 \\ 4x_3-3x_4 & = & 9 \\ 2x_4 & = & 2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad X=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema