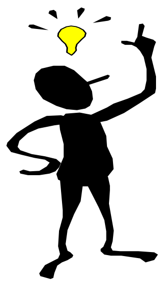
Espacios vectoriales

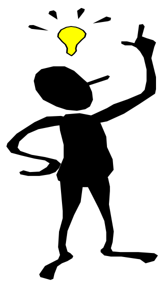


En el estudio de las matrices y, en particular, de los sistemas de ecuaciones lineales realizamos sumas y multiplicación por escalares con un tipo especial de matrices, las de orden nx1.

Abusando del lenguaje y la notación establecimos la correspondencia:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longleftarrow --- \longrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Es decir, aceptamos que $M_{nx1}(\Re) \cong \Re^n$, con el fin de aprovechar la familiaridad que se tiene con los espacios $\Re^2$ y $\Re^3$.



En este capítulo estudiaremos conjuntos que poseen propiedades algebraicas similares a $\Re^n$.

A dichos conjuntos se les dará el nombre de **espacios vectoriales** y a sus elementos el nombre de vectores.

En lo que sigue K designará al cuerpo $\Re$ de los números reales o al cuerpo C de los números complejos.

Espacios y subespacios vectoriales

Un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathcal{K}$ es un conjunto de objetos V con dos operaciones:

(1) $+ : V \times V \longrightarrow V$; $(u, v) \dashrightarrow u + v$

que es asociativa, conmutativa, posee elemento neutro (cero) y cada elemento posee un inverso.

(2) $p: \mathcal{K} \times V \longrightarrow V$; $(\alpha, v) \dashrightarrow \alpha \cdot v$

que satisface lo siguiente:

i) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v; \quad \forall \alpha, \beta \in \kappa; \quad \forall v \in V$

ii) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v; \quad \forall \alpha, \beta \in \kappa; \quad \forall v \in V$

iii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \quad \forall \alpha \in \kappa; \quad \forall u, v \in V$

iv) $1 \cdot v = v; \quad \forall v \in V$, con 1 elemento unidad de $\mathcal{K}$

La operación (1) es interna en V; se llama **suma o adición**. La operación (2) es externa y se llama **multiplicación por escalar o ponderación**.

Los elementos de V se llaman **vectores** y los de κ **escalares**. Si $\kappa = \Re$, se dice que V es un **espacio vectorial real**. Si κ = C, el espacio vectorial V se dice complejo.

En cualquier espacio vectorial V sobre κ se tiene que:

a) $0 \cdot v = 0, \quad \forall v \in V$

b) $\alpha \cdot 0 = 0, \quad \forall \alpha \in \kappa$

c) $\alpha \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha = 0 \quad \vee \quad v = 0)$

d) $(-1) \cdot v = -v, \quad \forall v \in V$

Ejemplos de espacios vectoriales

(1) Para n número natural, sea $\Re^n = \Re \times \ldots . \times \Re$ (n veces), es decir,

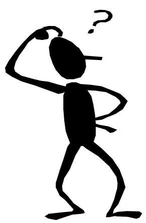
$$\Re^n = \{(x_1, \ldots\ldots, x_n) \ / \ x_i \in \Re, \ \forall i = 1, \ldots\ldots, n\}$$

$\Re^n$ con las operaciones siguientes:

$$(x_1, \ldots\ldots, x_n) + (a_1, \ldots\ldots, a_n) = (x_1 + a_1, \ldots\ldots, x_n + a_n)$$

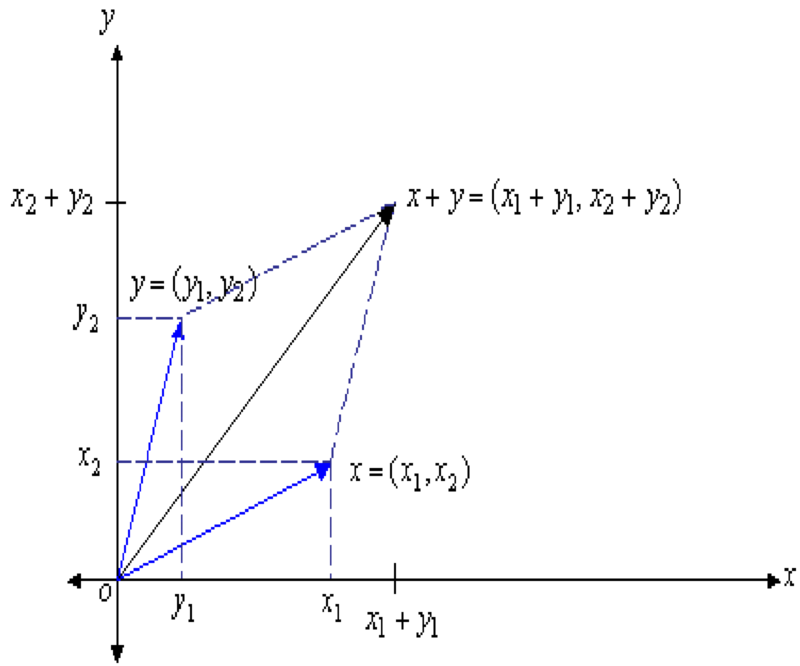
$$\alpha(x_1, \ldots\ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots\ldots, \alpha x_n), \ \alpha \in \Re$$

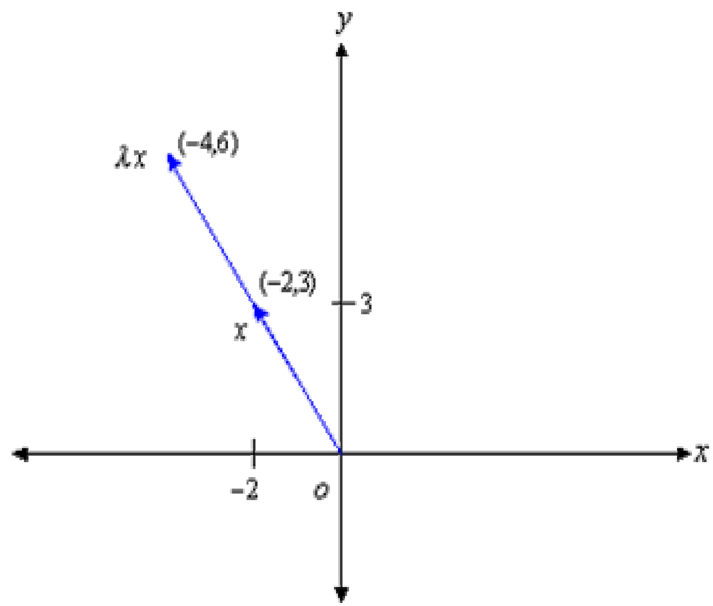
es un espacio vectorial real.



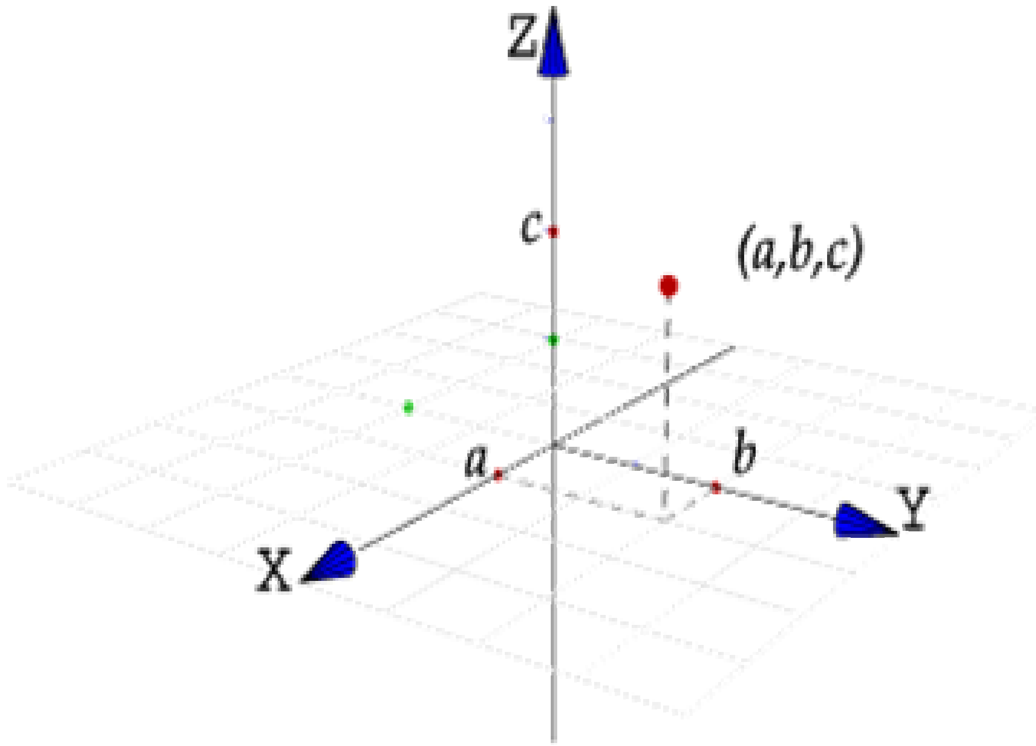
En consecuencia, $\Re$ es un espacio vectorial sobre sí mismo.

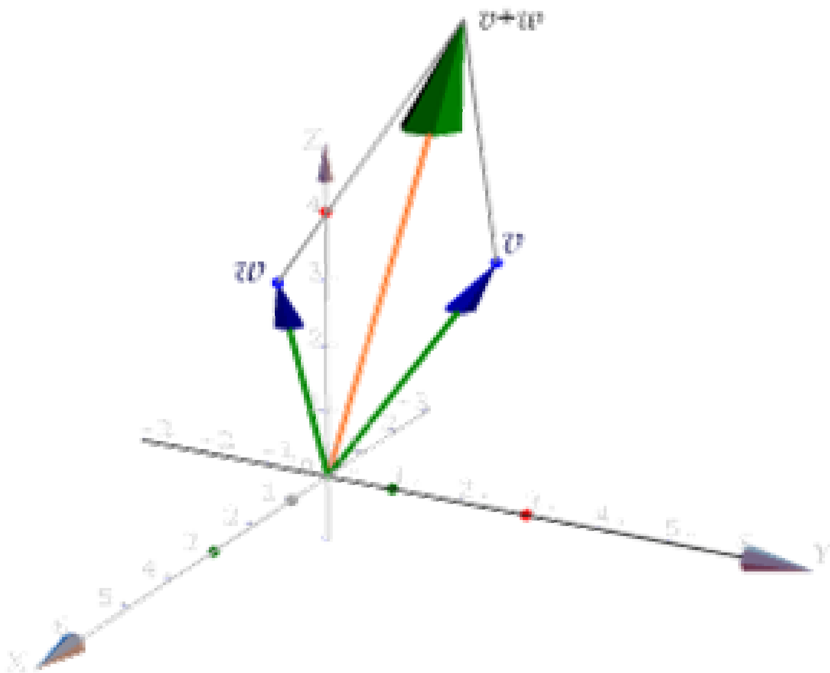
El espacio vectorial real $\Re^2$



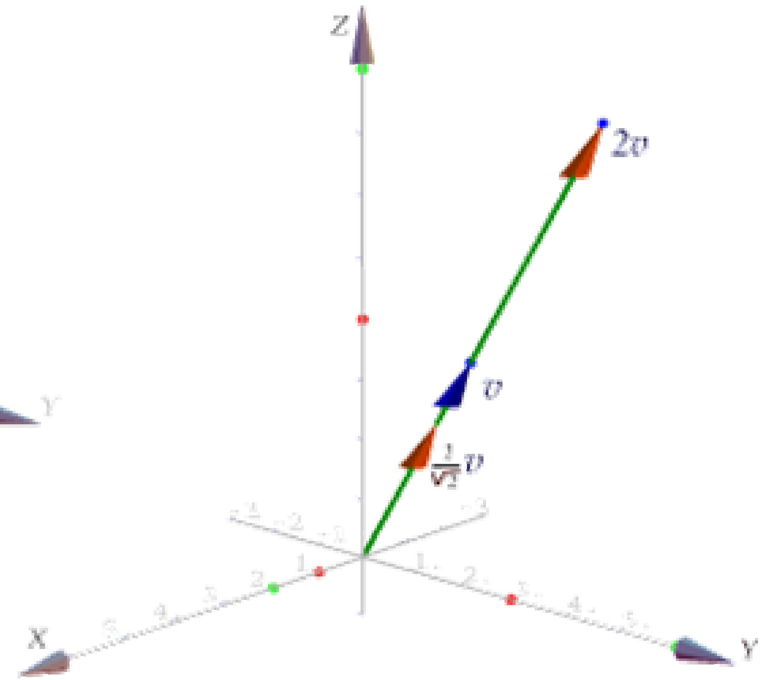


El espacio vectorial real $\Re^3$





Suma en $\Re^3$



Ponderación en $\Re^3$

(2) No sólo $\Re$ es un espacio vectorial sobre $\Re$. Si IK es un cuerpo, IK es un espacio vectorial sobre si mismo. En este caso, la ponderación coincide con la multiplicación del cuerpo IK. En consecuencia, C (números complejos) es un espacio vectorial complejo. Pero C también es un espacio vectorial real si se considera la ponderación:

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi\ , \quad \alpha \in \Re$$

(3) Para $m, n \in IN$, el conjunto $M_{mxn}(\Re)$ de las matrices reales de orden mxn, con las operaciones suma y multiplicación habituales de las matrices, es un espacio vectorial real.

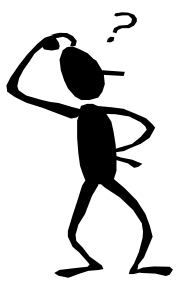
(4) El conjunto $\Re[x]$ de los polinomios en x con coeficientes reales, con las operaciones suma y ponderación usuales, es un espacio vectorial sobre $\Re$.

(5) Para n número natural, denotemos por

$$P_n[x] = \{p(x) \in \Re[x] \ / \ p(x) \text{ de grado } \leq n\}$$

$P_n[x]$, con las operaciones suma y multiplicación por escalares reales, es un espacio vectorial real.

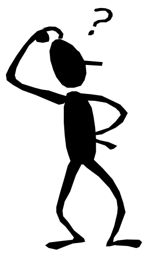
(6) Si $A \subseteq \Re$, el conjunto $F(A, \Re) = \{f : A \rightarrow \Re \ / \ \text{función}\}$, con la suma y ponderación usuales de las funciones, es un espacio vectorial sobre $\Re$.



¿Cuál es el elemento cero de los siguientes espacios vectoriales reales?

$\Re^n$, $M_{mxn}(\Re)$, $P_n[x]$ y $F(A, \Re)$

Los siguientes conjuntos, con las operaciones suma y ponderación habituales de los respectivos espacios, no son espacios vectoriales reales.



$$A = \{(x, y) \in \Re^2 \ / \ y = 2x - 3\}$$

$$B = \{a + 5x^2 \in P_2[x] \ / \ a \in \Re\}$$

$$C = \{A \in M_n(\Re) \ / \ \det(A) \neq 0\}$$

$$D = \{f \in F(\Re, \Re) \ / \ f \text{ creciente en } \Re\}$$

Ejercicio: Demuestre que los conjuntos A, B, C y D mencionados anteriormente, no son espacios vectoriales reales.

Cuando un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con las operaciones de V restringidas a sus elementos, resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces se dice que W es un **subespacio vectorial** (o subespacio lineal o simplemente subespacio) **de V.**

Por lo tanto,

$$W \text{ es un subespacio de } V \Rightarrow 0_V \in W$$

O equivalentemente,

$$0_V \notin W \Rightarrow W \text{ no es subespacio de } V$$

El siguiente teorema caracteriza a los subespacios de V.

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre κ y W un subconjunto no vacío de V. W es un subespacio de V si y sólo si

i) $\forall\, u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

ii) $\forall \alpha \in \kappa,\ \forall u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$

Del teorema anterior sigue que, si V es un espacio vectorial sobre κ, entonces V y $\{ 0 \}$ son subespacios vectoriales de V.

Ejemplo: El conjunto $D = \{(x,\ y) \in \Re^2\ /\ y = x^2\}$ no es un subespacio de $\Re^2$ pues, por ejemplo, u = (2, 4) $\in$ D, v = (3, 9) $\in$ D y u + v = (5, 13) $\notin$ D.

Ejemplo: El conjunto $W = \{(x,\ y,\ z) \in \Re^3\ /\ 2x - z = 0\}$ es un subespacio de $\Re^3$; en efecto,

$$W = \{(x,\ y,\ 2x)\ \ /\ \ x\ ,\ y\ \in \Re\}$$

y se tiene que,

i) 0 = (0, 0, 0) $\in W$ y $W \neq \varnothing$

ii) (x, y, 2x) + (a, b, 2a) = (x + a, y + b, 2(x + a)) $\in$ W

iii) $\alpha(x, y, 2x) = (\alpha x, \alpha y, 2\alpha x) \in W$

En virtud del teorema enunciado anteriormente, W es un subespacio de $\Re^3$.

Ejemplo: El conjunto $U = \{ A \in M_n(\Re)$ / A es simétrica$\}$ es un subespacio de $M_n(\Re)$; efectivamente,

i) $O_n \in U$; puesto que la matriz nula es simétrica.

Luego $U \neq \emptyset$

i) $A, \; B \in U \Rightarrow (A^t = A \;\wedge\; B^t = B)$

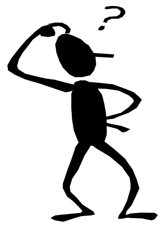
$$\Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t = A + B$$

$$\Rightarrow A + B \in U$$

ii) $(\alpha \in \Re \;\wedge\; A \in U) \Rightarrow (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$

$$\Rightarrow \alpha A \in U$$

Por lo tanto, W es un subespacio de $M_n(\Re)$.



Ejercicio: Muestre 3 ejemplos de conjuntos que sean subespacios de $\Re^3$ y 3 conjuntos que no sean subespacios de $\Re^3$.

Ejercicio: Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios del respectivo espacio.

$$S_1 = \{(x,\ y) \in \Re^2 \ / \ y = 4x\}$$

$$S_2 = \{a + bx + c\,x^2 \in P_2[x] \ / \ a + 2c = 0\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z, t) \in \Re^4 \ / \ x + 3y + 4t = 0 \ \wedge \ y - z + 2t = 0\}$$

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re) \ / \ 3a + b - d = 0 \ \wedge \ 2c - b = 0 \right\}$$

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre κ y sean U y W subespacios de V. Entonces $U \cap W$ es un subespacio de V.

Efectivamente, como 0_V pertenece a U y también a W, $0_V \in U \cap W$. Además si u, v son vectores de $U \cap W$,

$$u \in U \;\wedge\; u \in V \;\wedge\; v \in U \;\wedge\; v \in W$$

$$\Rightarrow\; u + v \in U \;\wedge\; u + v \in W$$

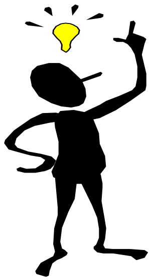
$$\Rightarrow\; u + v \in U \cap W$$

Finalmente, si $u \in U \cap W$ y $\alpha \in \kappa$,

$$u \in U \;\wedge\; u \in W$$

$$\Rightarrow\; \alpha u \in U \;\wedge\; \alpha u \in W$$

$$\Rightarrow\; \alpha u \in U \cap W$$



Es posible demostrar que la intersección de cualquier colección de subespacios de un espacio vectorial V es un subespacio de V.

También es fácil mostrar que la unión de dos subespacios de un espacio vectorial V no es un subespacio de V.

Por ejemplo, considere los subespacios de $\Re^2$:

$$U = \{ (x, y) \ / \ y = 2x \}$$

$$W = \{ (x, y) \ / \ y = 3x \}$$

Entonces $U \cup W$ no es un subespacio de $\Re^2$.

¿Por qué?

Combinaciones lineales - generadores

Sea V es un espacio vectorial sobre κ y $S=\{v_1,\ldots\ldots,v_n\}$ un conjunto de vectores de V. Una **combinación lineal** de vectores de S (o de $v_1,\ldots\ldots,v_n$) es un vector de la forma $v=\alpha_1 v_1+\ldots\ldots+\alpha_n v_n$, donde $\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n \in \kappa$.

Por ejemplo, el vector v = (-1, -2, 7) del espacio $\Re^3$ es combinación lineal de los vectores s = (1, -4, 3) y t = (-2, 5, -1) puesto que v = 3 s + 2 t.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S resulta ser un subespacio vectorial de V; se llama **espacio generado por S** (o espacio generado por $v_1, \ldots\ldots, v_n$) y se denota $<S>$ o $<\{v_1, \ldots\ldots, v_n\}>$.

Ejemplo: Determinemos el subespacio generado por los vectores $v_1 = (1, 0, 2)$ y $v_2 = (0, -1, 1)$ de $\Re^3$:

$$
\begin{aligned}
<\{v_1,\ v_2\}> &= \{\, \alpha v_1 + \beta v_2 \ / \ \alpha,\ \beta \in \Re \,\} \\
&= \{\, \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, -1, 1) \ / \ \alpha,\ \beta \in \Re \,\} \\
&= \{\, (\alpha,\ -\beta,\ 2\alpha + \beta) \ / \ \alpha,\ \beta \in \Re \,\} \\
&= \{\, (x,\ y,\ z) \in \Re^3 \ / \ z = 2x - y \,\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Sea $S = \{ 2 - 5x + x^2, \;\; 1 - 3x + 2x^2 \} \subset P_2[x]$

¿El vector $p(x) = 2 - 4x - 5x^2$ pertenece a $< S >$?

La pregunta equivale a ¿existen $\alpha, \beta \in \Re$ tales que

$$\alpha(2 - 5x + x^2) + \beta(1 - 3x + 2x^2) = 2 - 4x - 5x^2 \,?$$

Esta igualdad nos conduce a

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha + \beta = 2 \\ -5\alpha - 3\beta = -4 \\ \alpha + 2\beta = -5 \end{array}\right|$$

Sistema que resulta incompatible y, en consecuencia,

$p \notin < S >$

Ejercicio: **Determine si las siguientes afirmaciones, relativas a un espacio vectorial V, son verdaderas o falsas:**

A) $0 \in < S >, \quad \forall\, S \subseteq V$

B) $\forall k = 1, \ldots, n, \quad v_k \in < \{v_1, \ldots, v_n\} >$

C) $S \subseteq T \Rightarrow < S > \subseteq < T >$

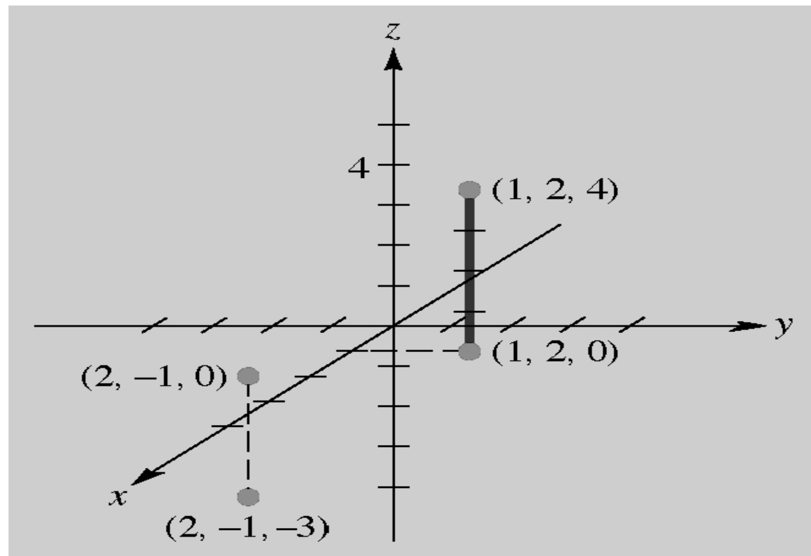
D) $< S > = < T > \Rightarrow S = T$

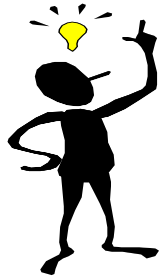
Si V es un espacio vectorial y S es un subconjunto de V, puede ocurrir que < S > = V; en este caso se dice que **S genera a V** o que **V está generado por S**.

Ejemplo: Consideremos los vectores de $\Re^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$. Entonces $\{e_1, e_2, e_3\}$ genera al espacio $\Re^3$; en efecto,

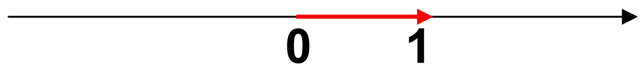
$$\begin{aligned} <\{e_1, e_2, e_3\}> &= \{a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1) \ / \ a,b,c \in \Re\} \\ &= \{(a,b,c) \ / \ a,b,c \in \Re\} \\ &= \Re^3 \end{aligned}$$

Puntos en el espacio $\Re^3$



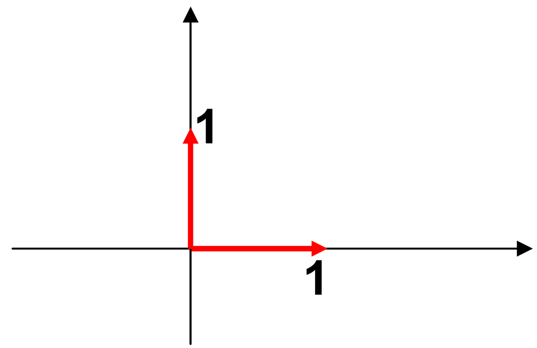


$\Re$ está generado por $e_1 = 1$



$\Re^2$ está generado por

$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$



$P_2[x]$ está generado por $\{1, x, x^2\}$ puesto que

$$a + bx + cx^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$$

¿Cuáles son los generadores “naturales” de $M_2(\Re)$?

Dependencia lineal

En $\Re^4$, consideremos los vectores u = (1, 0, -1, 0), v = (0, 1, 0, -1) y w = (1, -1, -1, 1). Entonces,

< {u, v, w} > = $\{(\alpha + \gamma, \beta - \gamma, -\alpha - \gamma, -\beta + \gamma) \,/\, \alpha, \beta, \gamma \in \Re\}$

= {(a, b, c, d) / a + c = 0 y b + d = 0 }

Por otra parte,

< {u, v} > = $\{(\alpha, \beta, -\alpha, -\beta) \,/\, \alpha, \beta \in \Re\}$

= {(a, b, c, d) / a + c = 0 y b + d = 0]

Es decir, < {u, v, w} > = < {u, v} >. Este hecho no es casual, se deriva de la "dependencia lineal" que existe entre u, v, w que, en este caso, significa w = u – v.

Sea V espacio vectorial sobre K y $S=\{v_1,\ldots\ldots,v_n\}$ un conjunto de vectores de V. Se dice que S es **linealmente dependiente** (l.d.) si existen escalares $\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n$ no todos nulos tales que $\alpha_1 v_1+\ldots\ldots+\alpha_n v_n=0$

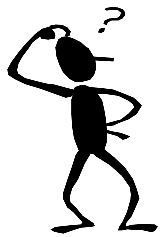
Si S no es l.d., se dice que S es **linealmente independiente** (l.i.). Por lo tanto S es l. i. si

$$\alpha_1 v_1+\ldots\ldots+\alpha_n v_n=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i=0,\ \forall i=1,\ldots\ldots,n$$

Por ejemplo, los vectores e_1, e_2, e_3 de $\Re^3$ son l. i.

¡demuéstrelo!

Sea e_i el vector de $\Re^n$ que tiene todas sus componentes iguales a cero, excepto la i-ésima que es uno. Entonces el conjunto de vectores $\{e_1, \ldots, e_n\}$, además de generar a $\Re^n$, es un conjunto l. i.



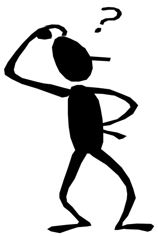
El conjunto $\{1, x, x^2\}$ de generadores de $P_2[x]$ es un conjunto l. i.

Los vectores $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

generan al espacio $M_2(\Re)$ y son l. i.

Ejercicio: Demuestre las afirmaciones hechas antes.

Ejercicio: Determine si los siguientes conjuntos son l. i.



$$S_1 = \{(1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0)\} \subset \Re^3$$

$$S_2 = \{(1,\ 1, -2),\ (-1,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 3,\ 2)\} \subset \Re^3$$

$$S_3 = \{1 + 2x - 2x^2,\ \ 3x + x^2,\ \ 1 - 2x^2\} \subset P_2[x]$$

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\Re)$$

Ejercicio: Sean V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, u y v vectores de V.

a) ¿Bajo que condiciones { v } es l. i.?

b) ¿Bajo que condiciones { u, v } es l.d.?

Ejercicio: **Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.**

Demuestre que:

a) $0 \in S \Rightarrow S$ l.d

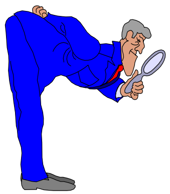
b) $(S \subset T \ \wedge \ T \text{ l.i.}) \Rightarrow S$ l.i.

c) $(S \subset T \ \wedge \ S \text{ l.d.}) \Rightarrow T$ l.d.

Ejercicio: Suponga que $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial V.

Demuestre que $\{v_1 + v_2 - 2v_3, \ 2v_2 + v_3, \ v_1 - 2v_3 \}$ es también un conjunto linealmente independiente de V.

Base - dimensión



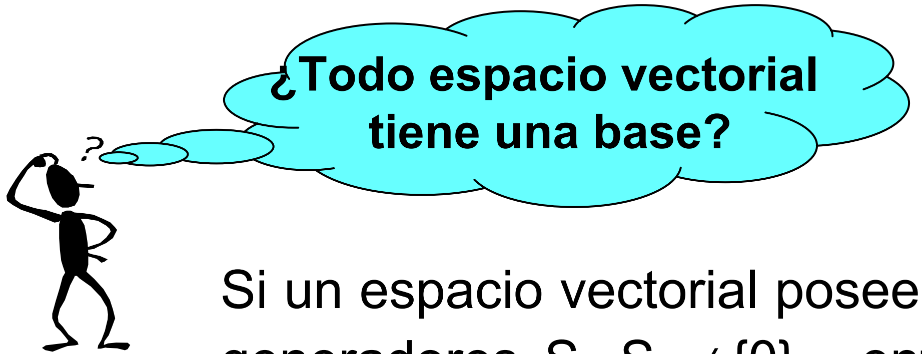
Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Una **base** de V es un conjunto B de vectores de V que es linealmente independiente y generador de V.

Por ejemplo, para cada $n \in \mathrm{IN}$ el conjunto B = { e_1, ... , e_n} de vectores de $\Re^n$, es una base de $\Re^n$; se llama **base canónica (o usual)** de $\Re^n$.

Los conjuntos $B = \{1, x, x^2\}$

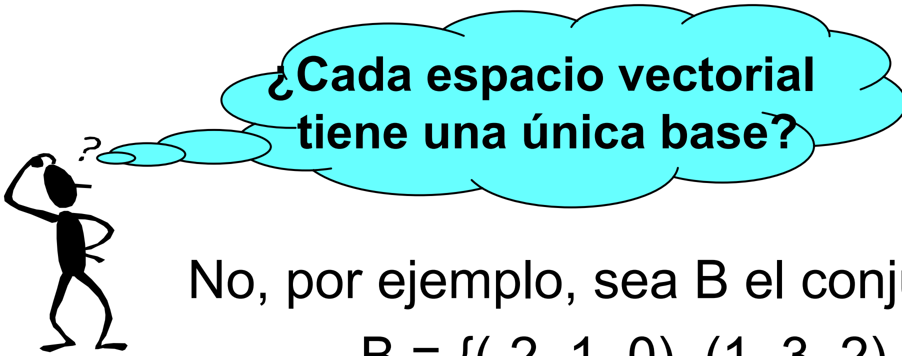
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son las **bases canónicas** de $P_2[x]$ y $M_2(\Re)$ respectivamente.



Si un espacio vectorial posee un conjunto finito de generadores S, S $\neq \{0\}$, entonces S contiene a una base de V.

Para demostrar este hecho consideremos $S = \{v_1, . . . , v_m\}$.
(*) Si S es l.i., entonces S es base de V. Si S no es l.i., alguno de los vectores de S, llamemos v_i depende linealmente de los demás y el conjunto $S^{(1)} = S - \{v_i\}$ sigue generando a V. Y volvemos a (*) pero ahora con $S^{(1)}$.
Repitiendo este proceso llegamos a obtener una base de V que, al menos, tendrá un solo vector no nulo.



No, por ejemplo, sea B el conjunto de vectores de $\Re^3$

$$B = \{(-2, 1, 0), (1, 3, 2), (1, 1, 1)\}$$

i) Demostremos que B es linealmente independiente.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tales que

$$\alpha(-2,1,0)+\beta(1,3,2)+\gamma(1,1,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|} -2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+3\beta+\gamma=0 \\ 2\beta+\gamma=0 \\ \hline \end{array}$$

Sistema que tiene solución única $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$

Luego B es l. i.

ii) Demostremos que B genera a $\Re^3$.

Sea $(a, b, c) \in \Re^3$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tales que

$$\alpha(-2, 1, 0) + \beta(1, 3, 2) + \gamma(1, 1, 1) = (a, b, c)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2\alpha + \beta + \gamma = a \\ \alpha + 3\beta + \gamma = b \\ 2\beta + \gamma = c \end{array}\right|$$

Sistema que tiene solución única

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = -a - b + 2c \\ \beta = a + 2b - 3c \\ \gamma = -2a - 4b + 7c \end{array}\right|$$

En consecuencia,

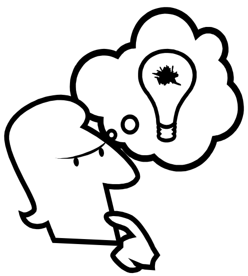
(-a-b+2c)(-2, 1, 0) + (a+2b-3c)(1, 3, 2) + (-2a-4b+7c)(1, 1, 1) = (a, b, c)

Luego B genera a $\Re^3$ y B es una base de $\Re^3$.

Ejercicio: Determine si los conjuntos S_1, S_2 son base del espacio $P_2[x]$.

$$S_1 = \{\, 2 + 3x + x^2,\ \ 3 + x,\ \ -1 + 2x + x^2 \,\}$$

$$S_2 = \{1 + x^2,\ \ -1 + x,\ \ 2 + 2x \,\}$$



Ejercicio: Suponga que $\{ v_1,\ v_2,\ v_3 \}$ es una base de un espacio vectorial V. Demuestre que $\{v_1 + 2v_2 - v_3,\ \ v_2 + 3v_3,\ \ v_1 + 4v_2 + 6v_3 \}$ también es una base de V.

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ puede tener múltiples bases, pero se puede demostrar que todas ellas, cuando son finitas, tienen el mismo número de elementos (la misma cardinalidad). Este hecho nos permite entregar el siguiente concepto:

Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ que tiene una base B con n vectores, entonces se dice que V es un espacio de dimensión finita y el número entero n se llama **dimensión** de V.

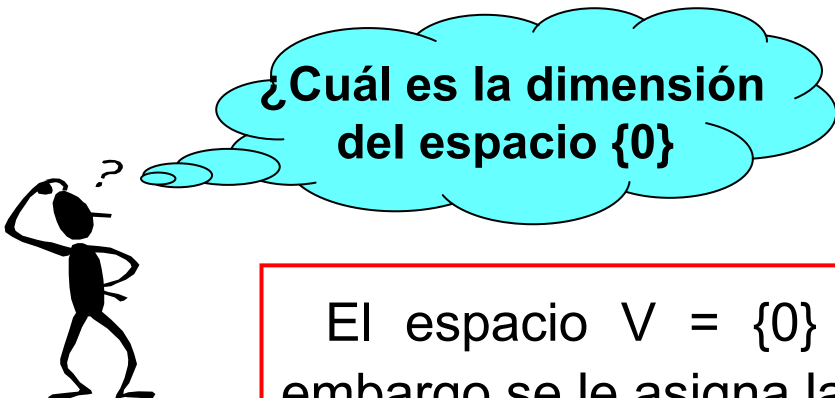
Si V tiene dimensión n, anotaremos $\mathbf{dim_K V = n}$ o $\mathbf{dim\ V = n}$, si no hay lugar a confusión.

En consecuencia,

$$\dim \Re = 1, \qquad \dim \Re^{n} = n$$

$$\dim P_2[x] = 3, \qquad \dim P_n[x] = n + 1$$

$$\dim M_2(\Re) = 4, \qquad \dim M_{mn}(\Re) = mn$$



El espacio V = {0} no posee base, sin embargo se le asigna la dimensión cero:

dim {0} = 0

Ejemplo: Determinemos la dimensión del subespacio de $P_2[x]$, $W = \{ a + bx + cx^2 \ / \ 2a - b + 4c = 0\}$

Se tiene que
$$W = \{a + bx + cx^2 \ / \ b = 2a + 4c \}$$
$$= \{ a + (2a + 4c)x + cx^2 \ / \ a, c \in \Re \}$$
$$= \{ a(1 + 2x) + c(4x + x^2) \ / \ a, c \in \Re \}$$
$$= < \{ 1 + 2x, \ 4x + x^2 \} >$$

Siendo $B = \{ 1 + 2x, \ 4x + x^2 \}$ un conjunto generador de W y linealmente independiente, puesto que B tiene dos vectores y uno no es "múltiplo escalar" del otro, B es una base de W; luego dim W = 2.

Observaciones:

1) **La dimensión del espacio vectorial real C de los números complejos es 2. Pero si consideramos a C como espacio vectorial sobre si mismo, entonces C es un espacio de dimensión 1.**

   Justifique esta afirmación.

2) **Existen espacios vectoriales que no poseen una base finita. Dichos espacios se dicen de dimensión infinita; por ejemplo, el espacio vectorial real C([a, b]; $\Re$), de todas las funciones reales continuas en [a, b] tiene dimensión infinita.**

   Muestre otro ejemplo de un espacio vectorial de dimensión infinita.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n. La demostración de los siguientes teoremas queda de ejercicio.

1. Si $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$, con $m > n$, entonces S es l.d.
2. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es l. i., entonces B es base de V.
3. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es generador de V, entonces B es base de V.
4. Si W es un subespacio de V, entonces $\dim W \leq n$
5. Si W es un subespacio de V tal que $\dim W = n$, entonces $V = W$.

En un espacio vectorial V de dimensión finita, un conjunto linealmente independiente de vectores de V puede completarse hasta formar una base de V.

Teorema (Completación de base)

Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n.
Si $\{v_1, \ldots\ldots, v_k\} \subset V$, con k < n, es un conjunto linealmente independiente, entonces existen vectores $v_{k+1}, \ldots\ldots, v_n \in V$ tales que $\{v_1, \ldots\ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es base de V.

Ejercicio: Demuestre el teorema precedente.

Ejercicio: **Considere el subespacio de $M_2(\mathbb{R})$,**

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a - 2b + c - 4d = 0 \ \wedge \ a + b - 3d = 0 \right\}$$

a) Determine una base S para W.

b) Encuentre una base B de $M_2(\mathbb{R})$ que contenga a la base S de W.

Ejercicio: **Determine todos los valores del número k de modo que el conjunto**

$$B = \{ (1, 1, -1), (3, k, k), (4, k, 0)\}$$

sea una base de $\mathbb{R}^3$.

El siguiente teorema nos proporciona otra caracterización para las bases de un espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema: Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ conjunto de vectores de V.

B es base de V $\Leftrightarrow$ todo vector v de V se escribe de una única manera como combinación lineal de los vectores de B.

Ejercicio: Demuestre el teorema precedente.

El teorema precedente asegura que para cada $v \in V$ existen únicos escalares $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n \in \kappa$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n$$

Estos escalares reciben el nombre de **coordenadas del vector v** con respecto a la base (ordenada) B y se denotan

$$[v]_B = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)$$

Observe que $[v]_B$ es un vector de κ^n. Por esta razón, muchas veces es llamado vector coordenado.

Ejemplo: Las coordenadas del vector v = (6, -5) $\in \Re^2$ con respecto a la base canónica E = {(1, 0), (0, 1)} de $\Re^2$ son

$$[v]_E = (6,\ -5)$$

¿Cuáles son las coordenadas de v = (6, -5) con respecto a la base ordenada B = {(5, - 3), (2, -1)} ?

Debemos resolver para $\alpha,\ \beta \in \Re$ la ecuación

$$\alpha(5,\ -3) + \beta(2,\ -1) = (6,\ -5)$$

es decir,

$$\begin{aligned} 5\alpha + 2\beta &= 6 \\ -3\alpha - \beta &= -5 \end{aligned}$$

De aquí, $[v]_B = (4,\ -7)$

Ejemplo: Sea $v \in \Re^3$ tal que $[v]_B = (1, -1, 2)$, donde B es la base ordenada B = {(1, -1, 3), (1, 0, -2), (3, 1, -1)}. ¿Cuál es el vector v? Determinemos $[\ v\ ]_C$, donde C es la base C = {(1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 4)}.

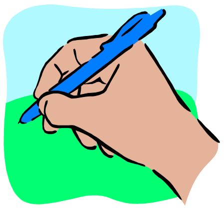
El vector es v = 1(1, -1, 3) - 1(1, 0, -2) + 2(3, 1, -1) = (6, 1, 3)

Determinemos $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tales que

$$\alpha(1,0,1) + \beta(1,1,2) + \gamma(1,1,4) = (6,1,3)$$

Esto requiere resolver el sistema compatible

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 6 \\ \beta + \gamma &= 1 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma &= 3 \end{aligned}\right|$$



Obtenemos $[\ v\ ]_C = (5, 3, -2)$

Ejemplo: Consideremos la base ordenada de $P_2[x]$

$$B = \{1 + x^2,\ 1 + x,\ 2 + 3x^2\}$$

Determinemos las coordenadas del vector $p(x) = 4 + 5x - 3x^2$ con respecto a la base B, esto es, encontremos $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tales que

$$\alpha(1 + x^2) + \beta(1 + x) + \gamma(2 + 3x^2) = 4 + 5x - 3x^2$$

Reordenando e igualando polinomios obtenemos el sistema:

$$\Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma &= 4 \\ \beta &= 5 \\ \alpha + 3\gamma &= -3 \end{aligned} \right|$$

cuya solución nos conduce a

$$[p(x)]_B = (3,\ 5,\ -2)$$

Sea V espacio vectorial sobre κ y B una base ordenada de V. Entonces,

(1) $[v + u]_B = [v]_B + [u]_B$, $\forall$ v, u $\in$ V

(2) $[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$, $\forall$ v $\in$ V, $\forall \alpha \in \kappa$

Ejercicio: Sea B = { v_1, v_2, v_3 } una base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine los vectores de B si se sabe que (-1, 1, 1), (1, -1, 2) y (3, -1, 1) son las respectivas coordenadas, según la base B, de los vectores e_1, e_2, e_3 de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Suma y Suma directa

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean U, W dos subespacios de V.

Ya mencionamos que la unión de U y W no es, necesariamente, un subespacio de V. Definiremos U + W, la suma de U y W; esta resultará ser un subespacio de V que contendrá a ambos subespacios.

La suma de U y W es:

$$U+W=\{v \in V \ / \ v=u+w,\ u \in U,\ w \in W\}$$

Se tiene que:

i) $0_V = 0 + 0$, con $0 \in U$ y $0 \in W$

ii) Si $v_1 = u_1 + w_1$ y $v_2 = u_2 + w_2$ son vectores de U + W, entonces $v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

iii) Si $\alpha \in \kappa$, entonces $\alpha v_1 = \alpha u_1 + \alpha w_1 \in U + W$

Por lo tanto U + W es un subespacio de V. Además se puede establecer que:

(1) $U \subseteq U + W$ y $W \subseteq U + W$

(2) Si $U = \langle S \rangle$ y $W = \langle T \rangle$, entonces $U + W = \langle S \cup T \rangle$

(3) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Puede suceder que dim(U + W) = dim V,
es decir, V = U + W. Por ejemplo, $\Re^2 = U + W$
donde $U = \langle\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}\rangle$ y $W = \langle\{(3,\ 1)\}\rangle$

En efecto, es claro que $U + W \subseteq \Re^2$
Por otra parte, si $(x,\ y) \in \Re^2$, entonces

$$(x,\ y) = (0,\ y - \tfrac{x}{3}) + (x,\ \tfrac{x}{3}) \in U + W$$

Si V = U + W, los vectores de V no necesariamente se escriben de manera única como una suma de un vector de U y un vector de W. En el ejemplo anterior,

$$(3, 3) = 2(0, 1) + (3, 1)$$
$$(3, 3) = -6(1, 0) + 3(3, 1)$$

Observe que:

$$\boxed{V = U + W \Leftrightarrow \forall v \in V, \exists u \in U, \exists w \in W : v = u + w}$$

Sea V un espacio vectorial sobre K y sean U, W dos subespacios de V. Se dice que V es la suma directa de U y W, en cuyo caso se anota $V = U \oplus W$ si

$$\forall v \in V, \exists! u \in U, \exists! w \in W : v = u + w$$

Ejercicio: Sean U = < {(0, 1)} > y W = < {(3, 1)} > subespacios de $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $\mathbb{R}^2$ es suma directa de U y W.

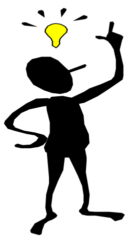
Una caracterización útil de la suma directa la entrega el siguiente teorema:

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean U, W dos subespacios de V.

$$V = U \oplus W \iff (V = U + W \quad \wedge \quad U \cap W = \{0\})$$

Ejercicio: Demuestre el teorema precedente.

Consecuencia del teorema anterior es la siguiente:



Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $V = U \oplus W$, entonces dim V = dim U + dim W.

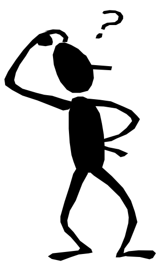
Ejercicio: Considere los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \{ (x, y, z) \;:\; x + y + z = 0 \}$$

$$U_2 = < \{ (1, 1, 1) \} >$$

Demuestre que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de U_1 y U_2.

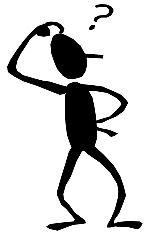
Ejercicio: Sean S_1 y S_2 los subespacios de $M_2(\mathbb{R})$



$$S_1 = \{ A \in M_2(\Re) \;/\; A \text{ diagonal } \}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re) \;/\; d = 0 \right\}$$

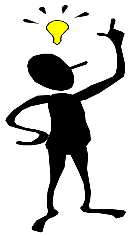
¿Es $M_2(\mathbb{R})$ suma directa de S_1 y S_2?



Dado un subespacio U de V, ¿existe un "suplementario" de U? Es decir, existe un subespacio W de V tal que $V = U \oplus W$.

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n y sea U subespacio de V. Entonces existe W subespacio de V tal que $V = U \oplus W$.

En efecto, si U = V, basta tomar W = {0}. Supongamos que dim U = k < n y sea $\{ v_1, \ldots, v_k\}$ una base de U. Por el teorema completación de base, existen $v_{k+1}, \ldots,$ v_n vectores de V tales que $\{ v_1, \ldots, v_n \}$ es base de V. Sea $W = \{ v_{k+1}, \ldots, v_n\}$; entonces $V = U \oplus W$.



El suplementario de un subespacio U no es único. En $\Re^2$ cualquier par de rectas no colineales que pasen por el origen, están asociadas a subespacios suplementarios.

Ejercicio: Considere el subespacio de $\Re^4$,

U = {(x, y, z, t) : x - 2y + z – 4 t = 0 y x + y + 2z = 0}

Determine W subespacio de $\Re^4$ tal que $\Re^4 = U \oplus W$.