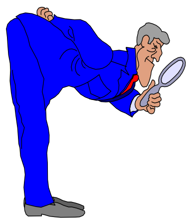
# Diagonalización de matrices reales

# Valores y vectores propios

Sea V espacio vectorial real. En lo que sigue, T será una transformación lineal de V en V; por lo tanto cualquier matriz asociada a T es una matriz cuadrada.



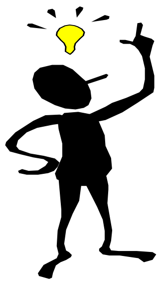
Un escalar $\lambda \in \Re$ se llama **valor propio de T** (o valor característico) si existe $v \in V,\ v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Si $\lambda \in \Re$ es un valor propio de T, cualquier $v \in V,\ v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$ se llama **vector propio de T** (o vector característico de T) asociado al valor propio $\lambda$ .

**Ejemplo**: $\lambda = 2$ es un valor propio de la aplicación lineal

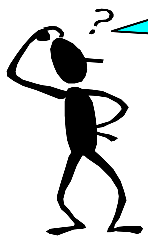
$$T : \Re^2 \rightarrow \Re^2 \,; \quad T(x,\; y) = (27x - 10y,\; 75x - 28y)$$

puesto que T(2, 5) = (4, 10) = 2 (2, 5). En este caso, v = (2,5) es un vector propio de T asociado al valor propio 2.



Si $\lambda$ es un valor propio de T y denotamos por $V_\lambda$ al conjunto de todos los vectores propio de T asociados al valor propio $\lambda$ , entonces es fácil mostrar que $V_\lambda$ resulta ser un subespacio de V. El subespacio $V_\lambda$ se llama **espacio propio de T** asociado a $\lambda$ .

$$V_\lambda = \{ v \in V \;/\; T(v) = \lambda\, v \}$$



## ¿Cómo determinamos los valores propios de T?

$\lambda$ es un valor propio de T $\Leftrightarrow$

$$\exists\, v \in V,\ v \neq 0 \ \text{ tal que } \ T(v) = \lambda\, v \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, v \in V,\ v \neq 0 \ \text{ tal que } \ T(v) - \lambda\, v = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, v \in V,\ v \neq 0 \ \text{ tal que } \ (T - \lambda\, I_n)(v) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, v \in V,\ v \neq 0, \quad v \in \mathrm{Ker}\,(T - \lambda\, I_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$T - \lambda\, I_n \quad \text{no invertible} \quad \Leftrightarrow$$

$$\det\,[T - \lambda\, I_n] = 0$$

Observe que $p(\lambda) = \det[T - \lambda I_n]$ es un polinomio en $\lambda$ de grado n y los valores propios de T son las raíces reales de dicho polinomio o de la ecuación $p(\lambda) = 0$. Note que

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(T - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\lambda I - T) = 0$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{ v \in \Re^n \ / \ T(v) = \lambda v \} \\ &= \{ v \in \Re^n \ / \ T(v) - \lambda v = 0 \} \\ &= \{ v \in \Re^n \ / \ (T - \lambda I_n)(v) = 0 \} \\ &= \operatorname{Ker}(T - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Es decir, los vectores propios de T asociados a $\lambda$ son los vectores del kernel de la transformación lineal $[T - \lambda I_n]$.

**Ejemplo**: Sea T la transformación lineal

$$T:\Re^2 \to \Re^2;\ \ T(x,\ y)=(-y,\ x)$$

La matriz asociada a T es $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como la **"ecuación característica"** de T,

$$p(\lambda)=0 \iff \det[\lambda I - T]=0 \iff \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=0 \iff \lambda^2+1=0,$$

no tiene raíces reales, T no tiene valores propios.

**Ejercicio: Muestre que los valores propios de la siguiente transformación lineal T son 1 y 2.**

$$T:\Re^3 \to \Re^3;\ \ T(x,y,z)=(3x+y-z,\ 2x+2y-z,\ 2x+2y)$$

**Ejemplo**: Los vectores propios de la transformación lineal

$$T:\Re^3 \to \Re^3;\ \ T(x,y,z)=(3x+y-z,\ 2x+2y-z,\ 2x+2y)$$

se encuentran en $\text{Ker}[T-I_3]$ y en $\text{Ker}[T-2I_3]$, es decir,

$$\text{Ker}[\,T-I_3\,]=\{\,(x,\ y,\ z)\in\Re^3\ /\ \left.\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 0\\ 2x+2y-z &=& 0\end{array}\right|\ \}$$

$$=\ <\{\,(1,\,0,\,2)\,\}>$$

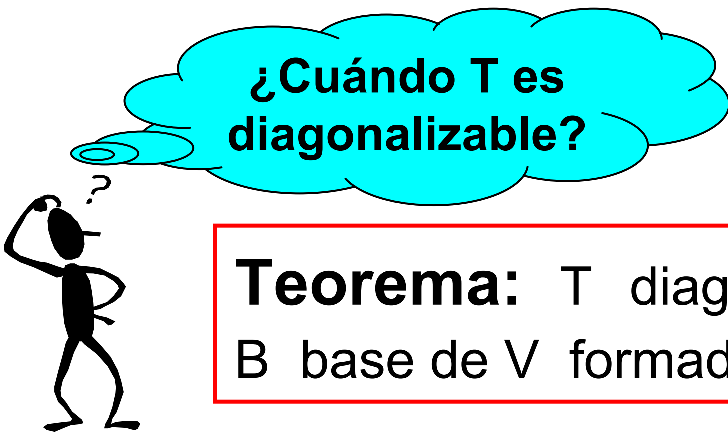
$$\text{Ker}[\,T-2I_3\,]=\{\,(x,\ y,\ z)\in\Re^3\ /\ \left.\begin{array}{c} x+y+z\ =\ 0\\ 2x-z\ =\ 0\\ 2x+2y-2z=0\end{array}\right|\ \}$$

$$=\ <\{\,(1,\,1,\,2)\,\}>$$

# Diagonalización

Se dice que una base B de V diagonaliza a la transformación lineal T si la matriz $[T]_B$ asociada a T es una matriz diagonal. Cuando tal base B existe, se dice que T es diagonalizable.

Una matriz $A \in M_n(\Re)$ es diagonalizable si la aplicación lineal asociada a A lo es.




**Teorema:** T diagonalizable si y sólo si existe B base de V formada por vectores propios de T.

En efecto, sea  B = {$v_1$, ….., $v_n$}  base de V con  $v_1$, ….., $v_n$ vectores propios de T.  Entonces,

$$
\begin{aligned}
T(v_1) = \ \lambda_1 v_1 \ &= \ \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \ldots\ldots + 0 v_n \\
T(v_2) = \ \lambda_2 v_2 \ &= \ 0 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots\ldots + 0 v_n \\
\ldots\ldots \qquad & \qquad \ldots\ldots \\
T(v_n) = \ \lambda_n v_n \ &= \ 0 v_1 + 0 v_2 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n
\end{aligned}
$$

donde $\lambda_i$  son valores propios de T no necesariamente distintos. La matriz de representación de T en la base B es:

$$
[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots. & 0 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & \ldots. & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

**Ejemplo**: La transformación lineal $T:\Re^3 \to \Re^3$;

$$T(x, y, z) = (-9x - 8y + 4z,\ 8x + 7y - 4z,\ -8x - 8y + 3z)$$

tiene dos valores propios: 3 y -1. Los espacios propios asociados son,

$$\text{Ker}[T - 3I_3] = <\{(1, -1, 1)\}>$$

$$\text{Ker}[T + I_3] = <\{(1, 0, 2),\ (0, 1, 2)\}>$$

Y B = {(1, -1, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 2)} es una base de $\Re^3$ que diagonaliza a T; en este caso,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo**: La transformación lineal $T : \Re^3 \to \Re^3$;

$$T(x, y, z) = (3x + y - z,\ 2x + 2y - z,\ 2x + 2y)$$

tiene dos valores propios: 1 y 2. Sin embargo, T no es diagonalizable. Los espacios propios asociados son,

$$\mathrm{Ker}[T - I_3] = <\{(1, 0, 2)\}>$$

$$\mathrm{Ker}[T - 2I_3] = <\{(1, 1, 2)\}>$$

Y es imposible encontrar una base de $\Re^3$ formada por vectores propios de T.

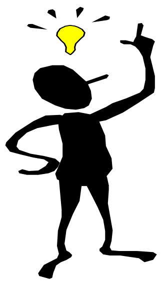
# Otros criterios de diagonalización

**Teorema:** T diagonalizable si y sólo si el polinomio característico de T tiene la forma $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdot\ldots\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{d_k}$ con $d_i=\dim V_{\lambda_i}$ y $V_{\lambda_i}$ espacio propio de T asociado al valor propio $\lambda_i$.

Por ejemplo, el polinomio característico de la transformación lineal $T(x,y,z)=(-9x-8y+4z,\ 8x+7y-4z,\ -8x-8y+3z)$ es

$$p(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$$

Y $\dim V_{\lambda=3}=1,\quad \dim V_{\lambda=-1}=2$; luego T diagonalizable.



**Teorema:** T diagonalizable si y sólo si

$$\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \ldots\ldots + \dim V_{\lambda_k}$$

donde $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_k$ son los valores propios de T y $V_{\lambda_i}$ es el espacio propio de T asociado al valor propio $\lambda_i$.

Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal diagonalizable del ejemplo anterior

$$T(x, y, z) = (-9x - 8y + 4z,\ 8x + 7y - 4z,\ -8x - 8y + 3z)$$

se tiene que $\dim\ V_{\lambda=3} + \dim\ V_{\lambda=-1} = 1 + 2 = \dim \Re^3$

**Ejercicio:** **Determine si la siguiente transformación lineal T es o no es diagonalizable.**

$$T:\Re^3 \to \Re^3;\ \ T(x, y, z) = (3x-y+z,\ 7x-5y+z,\ -6x+6y-2z)$$

El hecho que T sea diagonalizable significa que la matriz $[T]$ asociada a T, es "**similar**" a la matriz diagonal $[T]_B$ en el sentido siguiente:

Existe P matriz invertible tal que $[T]_B = P^{-1}[T]\,P$

**Ejercicio:** **Demuestre que los valores propios de una matriz triangular $A=(a_{ij})$ son los elementos $a_{ii}$ de la diagonal.**