UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES
Instituto de Ciencias Básicas

Álgebra Lineal

Isabel Arratia Zárate

Matrices y Sistemas de ecuaciones lineales

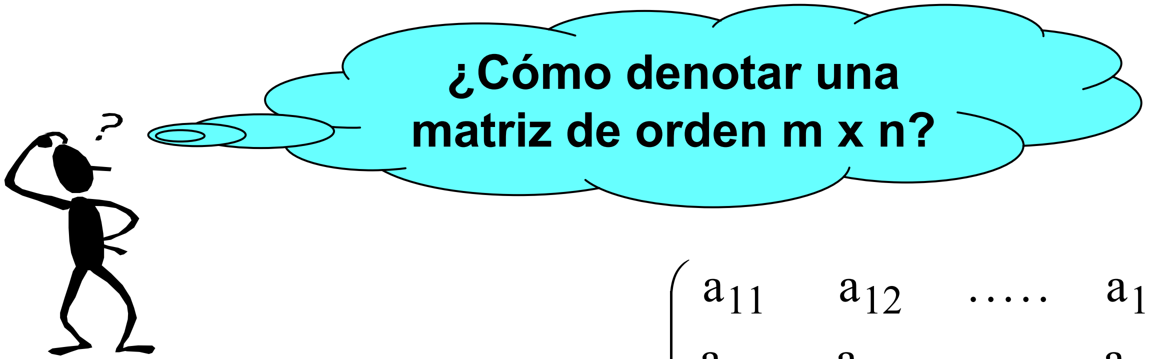
Matrices: definiciones y notaciones básicas

Una matriz A con componentes en un cuerpo $\mathbb{K}$ es un arreglo en filas y columnas de elementos de $\mathbb{K}$. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \sqrt{2} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 4 & \frac{2}{3} \\ 15 & -3 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$$

son matrices con componentes en $\Re$, el cuerpo de los números reales. La matriz A tiene dos filas y tres columnas mientras que la matriz B tiene tres filas y dos columnas.

Si una matriz tiene m filas y n columnas, se dice que ella es de **orden m x n** (se lee m por n).



Se usan dos índices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

lo que abreviadamente se expresa,

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots\ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

Ejercicio: Determine por extensión la matriz A, de orden 2x3 definida así, $a_{ij} = |\,2i - j\,|$.

El elemento a_{ij}, es el que se ubica en la i-ésima fila j-ésima columna de la matriz A; se llama **componente** ij de la matriz A.

Si la matriz A tiene el mismo número n de filas que de columnas, se dice que ella es una **matriz cuadrada de orden n**.

Si A es una matriz de orden n, las componentes a_{ii} constituyen la **diagonal de A**; se anota:

$$\text{diag}(A) = (a_{11},\ a_{22},\ \ldots\ldots,\ a_{nn})$$

La suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada de orden n se llama **traza de A**, es decir,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice **matriz diagonal** si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ son matrices diagonales.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para i > j, y se llama **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para i < j. Por ejemplo,

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$ son matrices triangulares.

Ejemplo: Determine por extensión la matriz $A = (a_{ij})$, de orden 3 dada por

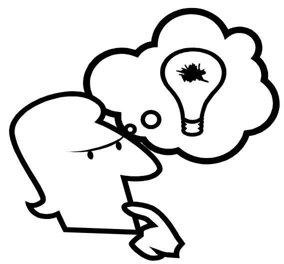
$$A = \begin{cases} i & \text{si} \quad i = j \\ 2i - j & \text{si} \quad i < j \\ |i - 3j| & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

¿Cuál es la diagonal y la traza de A ¿Cuál es el valor de la traza de A si la matriz A fuese de orden 20? ¿y si fuese de orden n?

Solución: La matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Su diagonal es diag(A) = (1, 2, 3) y tr(A) = 6. Si A es de orden 20, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{20} a_{ii} = 210$ y si es de orden n, $\mathrm{tr}(A) = \dfrac{n(n+1)}{2}$



Resulta fácil comprender la utilidad que prestan las matrices para ordenar datos.

La producción semanal, en cientos, de los artículos p_1, p_2, ….p_{60} que se fabrican en una industria se pueden expresar mediante una matriz P de 60 filas - donde se escribirán los productos elaborados - y 5 columnas que indicarán los días de la semana de lunes a viernes:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Lu} & \text{Ma} & \text{Mi} & \text{Ju} & \text{Vi} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3,5 & 3 & 3,2 & 3 \\ 6 & 6,5 & 6,3 & 6,2 & 6 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 4 & 3,8 & 3,5 & 4 & 3,2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ .. \\ .. \\ p_{60} \end{array}$$

El conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con componentes en el cuerpo κ será denotado por $M_{mxn}(\kappa)$ y será $M_n(\kappa)$ cuando se trate de matrices cuadradas de orden n.

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son **iguales** si tienen el mismo orden y además $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i\,j$.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden m x n, la **transpuesta de A**, denotada por A^t, es la matriz de orden n x m que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas de A. En consecuencia,

$$A^t = (a_{ji})$$

Ejercicio: **¿Cuál es la transpuesta de la matriz $A = (a_{ij})$ de orden 3 x 2 definida por $a_{ij} = 3i - j^2$?**

Sea $A = (a_{ij})$ matriz cuadrada. Se dice que A es una **matriz simétrica** si $A^t = A$ y se dice que A es **antisimétrica si** $A^t = -A$, donde -A es la matriz $-A = (-a_{ij})$.

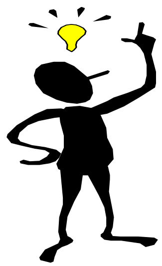
Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica.

Construya usted una matriz antisimétrica de orden 3.

Ejercicio: **Si A es una matriz de orden n antisimétrica, demuestre que diag(A) = (0, ... , 0) y tr (A) = 0.**

Ejercicios:

1) Determine por extensión la matriz $A=(a_{ij})$ de orden 4 definida como sigue. Calcule la traza de A. ¿Es A una matriz simétrica?



$$A=\begin{cases} i^2-7 & \text{si} \quad i=j \\ i-j+3 & \text{si} \quad i=j-1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otros casos} \end{cases}$$

2) Demuestre que toda matriz diagonal es simétrica.

3) Determine todos los valores reales de a y b de modo que la matriz B dada sea simétrica.

$$B=\begin{pmatrix} 2 & a+6 & 3 \\ a^2 & -5 & b+2 \\ 3 & -b^3 & -1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Se llama **matriz nula (o matriz cero) de orden m x n** a la matriz de orden m x n que tiene todas sus componentes iguales a $0 \in \kappa$

La matriz nula se denotará por O_{mxn} o simplemente O.

Suma de matrices

Si $A=(a_{ij}), \quad B=(b_{ij}) \in M_{mxn}(\kappa)$, la suma de A y B es la matriz $A+B=(c_{ij}) \in M_{mxn}(\kappa)$, donde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 6 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -2 & 6 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$

Observe que para sumar matrices, ellas deben ser del mismo orden. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\forall A, B, C \in M_{mxn}(\kappa)$
2. $A+B = B+A$, $\forall A, B \in M_{mxn}(\kappa)$
3. Existe O_{mxn} , matriz nula, tal que $A+O = A$, $\forall A \in M_{mxn}(\kappa)$
4. Para cada matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$, existe $-A \in M_{mxn}(\kappa)$ tal que $A+(-A) = O$, donde $-A = (-a_{ij})$ cuando $A = (a_{ij})$
5. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, $\forall A, B \in M_n(\kappa)$
6. $(A+B)^t = A^t + B^t$, $\forall A, B \in M_{mxn}(\kappa)$
7. A, B diagonales $\Rightarrow$ A+B diagonal
8. A, B simétricas $\Rightarrow$ A+B simétrica
9. A, B antisimétricas $\Rightarrow$ A+B antisimétricas

Ejercicio: Demuestre las propiedades enunciadas antes.

Multiplicación por escalar o ponderación

Si $A=(a_{ij})\in M_{mxn}(\kappa)$ y $\alpha\in\kappa$, la multiplicación α veces A es la matriz de orden m x n, $\alpha A=(\alpha\cdot a_{ij})$

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}-3 & 15\\ 4 & 12\\ -6 & 20\end{pmatrix}$, entonces $\frac{1}{3}A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ \frac{4}{3} & 4\\ -2 & \frac{20}{3}\end{pmatrix}$

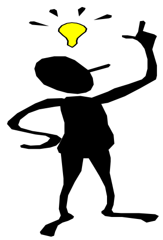
Se puede establecer que:

1. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A,\ \forall\alpha,\beta\in\kappa,\ \forall A$ matriz
2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\ \forall\alpha,\beta\in\kappa,\ \forall A,B\in M_{mxn}(\kappa)$
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\ \forall\alpha\in\kappa,\ \forall A,B\in M_{mxn}(\kappa)$
4. $1\cdot A=A,\quad (\text{-}1)A=\text{-}A,\quad 0\cdot A=O,\ \forall A$ matriz

Además 5. $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \cdot \mathrm{tr}(A), \quad \forall A \in M_n(\kappa)$

6. $(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t, \forall A \in M_{mxn}(\kappa)$

Ejercicio: **Demuestre las propiedades 1. a 6. anteriores.**



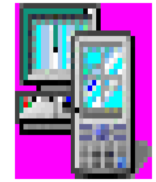
Las propiedades algebraicas de las matrices nos permiten resolver ecuaciones matriciales de manera eficiente.

Ejercicio: **Resuelva la ecuación**

$$5(X + A) = A^t - \tfrac{1}{3}(B - 9X^t)^t$$

si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $C^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Problema: Un fabricante produce tres modelos de zapatillas de descanso A, B y C en tres tamaños: para niños, damas y caballeros. La fabricación se realiza en dos plantas, una ubicada en San Bernardo y la otra en Maipú. La producción semanal, en pares de zapatillas, en cada planta se entrega a través de las matrices:



San Bdo.	Niños	Damas	Varones
A	20	34	30
B	16	20	48
C	24	28	32

Maipú	Niños	Damas	Varones
A	16	24	26
B	10	14	32
C	15	20	28

a) Determine la matriz que contiene los datos relativos a la producción semanal total de cada modelo de zapatilla en ambas plantas.

b) Si la producción en la planta de San Bernardo se incrementa en un 20% y la de Maipú en un 40%, escriba la matriz que representa la nueva producción semanal total de cada tipo de zapatilla.

La multiplicación de matrices

Si $A=(a_{ij})\in M_{mxn}(\kappa)$ y $B=(b_{ij})\in M_{nxr}(\kappa)$, la multiplicación de A y B es la matriz $AB=(c_{ij})$, de orden m x r, donde

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

El elemento ubicado en la fila i columna j del producto AB es:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots\ldots+a_{in}b_{nj}$$

Componentes de la fila i

Componentes de la columna j

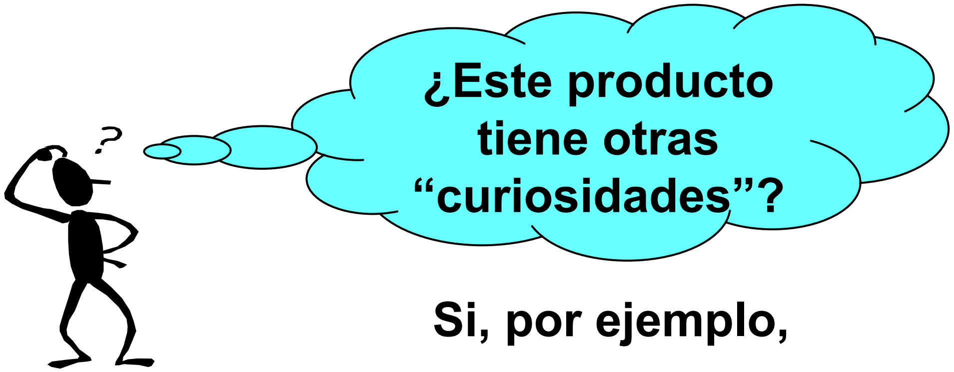
Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\text{entonces} \quad AB=\begin{pmatrix} 15 & -16 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$$

Observe que en este ejemplo, BA también se puede realizar pero es una matriz de orden 3, con lo que concluimos que

$\boxed{\textbf{La multiplicación de matrices no es conmutativa}}$

Note también que para la matriz A del ejemplo anterior, el producto $A^2 = A \cdot A$ no se puede efectuar.



Si, por ejemplo,

- Existen matrices cuadradas A, no nulas pero tales que $A^2 = O$
- Más aún, existen matrices A y B, de orden n, no nulas, distintas y AB = O, es decir, el producto de dos matrices puede ser la matriz cero y ninguna de ellas ser cero.

Por lo tanto, $AB = 0 \;\not\Rightarrow\; (A = 0 \vee B = 0)$

$$AB = AC \;\not\Rightarrow\; B = C$$

Sin embargo, siempre que las operaciones se puedan realizar, se puede demostrar que:

1. (A B) C = A (B C)
2. (A + B) C = A C + B C y C (A + B) = C A + CB

Surge la interrogante ¿Existe elemento identidad en el conjunto $M_{mxn}(\kappa)$?

La matriz cuadrada $I_n = (a_{ij})$ de orden n definida así:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

se llama matriz identidad; ella es tal que

$$A \cdot I_n = A = I_n \cdot A, \quad \forall A \in M_n(\kappa)$$

En consecuencia, existe elemento identidad en $M_n(\kappa)$.

Ejercicio: a) Muestre con ejemplos que, en general,

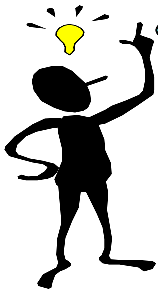
$$\operatorname{tr}(AB) \neq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) \quad \text{y que} \quad (AB)^t \neq A^t B^t$$

b) Demuestre que tr(AB) = tr(BA)

c) Demuestre que, siempre que los productos se puedan realizar, $(A\,B)^t = B^t A^t$.

Ejercicio: Determine la matriz X de modo que la siguiente igualdad resulte verdadera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Dadas las matrices A y B,
¿qué necesitamos para
resolver la ecuación AX = B?

La ecuación ax = b, en el conjunto de los números reales, se resuelve usando el inverso multiplicativo de a:

$$x = a^{-1}b = \frac{b}{a}$$

Si A es una matriz no nula nos preguntamos ¿existe una matriz B tal que AB = I_n = BA? Que equivale a ¿existe el inverso multiplicativo de A? Observe que esta pregunta tiene sentido sólo si A es una matriz cuadrada. Sin embargo, aunque A sea cuadrada, la respuesta a la interrogante es no siempre.

Por ejemplo para $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ investiguemos la existencia de tal matriz B.

Supongamos que $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es tal que AB = I_2; entonces

$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que equivale a $\begin{pmatrix} 3a+6c & 3b+6d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y a resolver $a + 2c = \frac{1}{3}$ y $a + 2c = 0$.

Concluimos que no existen a y c; de manera análoga, no existen b y d. Por lo tanto la matriz B no existe.

Surge entonces la siguiente definición:

Se dice que una matriz $A \in M_n(\kappa)$ es **invertible o no singular** si existe $B \in M_n(\kappa)$ tal que $AB = I_n = BA$. La matriz B, cuando existe, está únicamente determinada por A, se llama **inversa de A** y se denota por A^{-1}.

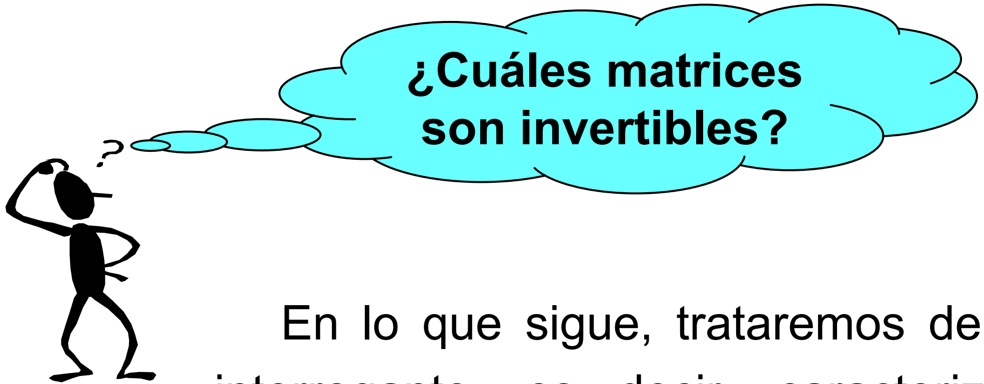
Por lo tanto, $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$

Ejercicio: Demuestre que,

a) $(A^{-1})^{-1} = A, \ \forall A \in M_n(\kappa)$ invertible

b) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \ \forall A \in M_n(\kappa)$ invertible

c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \ \forall A, B \in M_n(\kappa)$ invertibles



En lo que sigue, trataremos de contestar esta interrogante, es decir, caracterizaremos a las matrices invertibles. Además mostraremos maneras de calcular la inversa.

Una primera respuesta la obtendremos a través de los determinantes que comenzaremos a estudiar a continuación.

Determinantes

Asociado a cada matriz $A \in M_n(\kappa)$ existe un elemento de κ, su determinante, que lo denotaremos det(A) o | A | .

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\kappa)$, det(A) = ad – bc ; por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5$$

Si A es una matriz cuadrada de orden mayor que 2, el determinante de A se define en forma recursiva como sigue:

Sea $A = (a_{ij})$ matriz de orden n. Llamaremos **menor de orden ij** de A, y anotaremos M_{ij}, al determinante de orden n -1 que se obtiene a partir de A, eliminándole la i-ésima fila y la j-ésima columna.

El **cofactor de orden ij** de A, denotado C_{ij} es el número

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$, $M_{13} = 2$, $M_{32} = 1$

$$C_{13} = 2 \quad \text{y} \quad C_{32} = -1$$

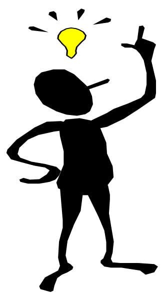
El **determinante de la matriz de orden n,** $A = (a_{ij})$ es el número

$$\det(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} & \text{con} \quad 1 \le j \le n \quad \text{fijo} \\ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} & \text{con} \quad 1 \le i \le n \quad \text{fijo} \end{cases}$$

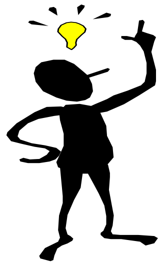
Por ejemplo, calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Fijando i = 1 tenemos que:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = M_{11} - 3M_{12} - 9M_{13} = -20 - 12 + 72 = 40$$



- Observe que el fijar i = 1 significó que al desarrollar la sumatoria intervinieron los elementos y los correspondientes menores (o cofactores) de la fila 1.
- El determinante det(A) = 40 se pudo haber obtenido por seis caminos diferentes. ¿Cuál de ellos es el que necesita menos cálculos?



De la definición dada para los determinantes siguen las siguientes **propiedades**:

1. $\det(A) = \det(A^t)$. En consecuencia, las propiedades de los determinantes demostradas para las filas, son también válidas para las columnas. Y recíprocamente.
2. Si todos los elementos de una fila (o columna) de la matriz A son cero, $\det(A) = 0$.
3. $\det(I_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En efecto, es claro que $\det(I_2) = 1$. Supongamos que $\det(I_k) = 1$, para $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\det(I_{k+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det(I_k) = 1$$

Del mismo modo, usando un razonamiento inductivo, podemos establecer que

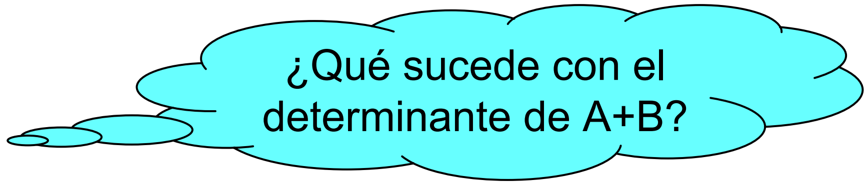
4. Si A es una matriz diagonal o triangular, det(A) es igual al producto de los elementos de la diagonal.
5. Si dos filas (o columnas) adyacentes de A son iguales, entonces det(A) = 0.

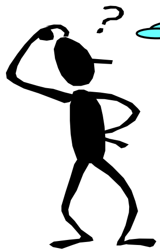
Esta propiedad nos permite demostrar que:

6. Si dos filas adyacentes o columnas adyacentes de A se intercambian, se produce un cambio de signo del determinante.

Lo que nos permite ampliar la propiedad 5:

7. Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces det(A) es igual a 0.





En general, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Sin embargo, existe una propiedad que la enunciaremos en primer lugar para uno de los casos de orden 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b \\ a_2 + c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$$

8. Si $A \in M_n(\kappa)$ y $A^{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, denota la k-ésima columna de A, entonces

$$\det(A^{(1)}, \ldots, A_1^{(k)} + A_2^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) =$$
$$\det(A^{(1)}, \ldots, A_1^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) + \det(A^{(1)}, \ldots, A_2^{(k)}, \ldots, A^{(n)})$$

Respecto a la ponderación, en general,

$$\det(\alpha A) \neq \alpha \cdot \det(A)$$

Pero, utilizando la notación de la propiedad 8, se tiene que

9. $\det(A^{(1)}, \ldots, \alpha A^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) = \alpha \det(A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}, \ldots, A^{(n)})$

Y como consecuencia, $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

10. Si A y B son matrices de orden n, se puede demostrar que

$$\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$$

11. Finalmente una propiedad que será de mucha utilidad:
Si las componentes de una fila (o columna) de A se multiplican por un número $\alpha \in \kappa$ y los resultados se suman a los elementos correspondientes de otra fila (o columna), el valor del determinante no se altera. Es decir,

$$\det(A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}, \ldots, A^{(j)} + \alpha A^{(k)}, \ldots, A^{(n)}) = \det(A)$$

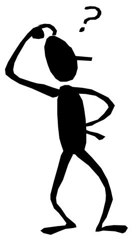
Si la fila i multiplicada por el número α la sumamos a la fila j, anotaremos $\alpha F_i + F_j$.

Para calcular el siguiente determinante usaremos la operación $-2F_1 + F_2$; a continuación la operación $-4F_1 + F_3$ y luego desarrollaremos el determinante a través de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 4 & -12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 19$$

Ejercicio: **Calcule los siguientes determinantes:**

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a+b & b \\ 1 & a+c & c \\ 1 & a+d & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$



Ejercicio: **Clasifique las siguientes afirmaciones como verdaderas o falsas:**

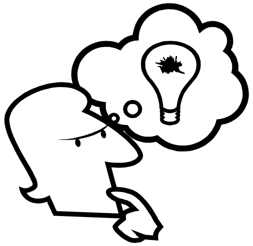
1. $\det(A^2 - B^2) = \det(A+B)\cdot\det(A-B), \quad \forall A, B \in M_n(\kappa)$
2. $\det(A + I_2) = \det(A) + \det(I_2) \quad \Leftrightarrow \quad tr(A) = 0$
3. $\det(-A) = -\det(A), \quad \forall A \in M_n(\kappa)$

Definición: La matriz **adjunta** de $A=(a_{ij})\in M_n(\kappa)$, es la transpuesta de la matriz de los cofactores de A , es decir,

$$\mathrm{adj}(A)=((-1)^{i+j}M_{ij})^t=(C_{ij})^t=(C_{ji})$$

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\Re)$, $\mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

¿Cuál es la matriz adjunta de $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? La matriz de los cofactores de A es $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -6 & -12 & 6 \end{pmatrix}$; luego $\mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 9 & 2 & -12 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$



Observe que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$,

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad adj(A) \cdot A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Y si el determinante de A es distinto de cero tenemos que,

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} adj(A) \right) = I_2 = \left(\frac{1}{\det(A)} adj(A) \right) \cdot A$$

Este resultado es más general; se puede demostrar que si $A \in M_n(\kappa)$ y det(A) es distinto de cero, entonces

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right) = I_n = \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right) \cdot A$$

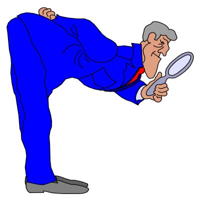
es decir, A es invertible y se tiene que $A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right)$

Recíprocamente, si A es invertible, entonces

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

y por lo tanto, $\det(A) \neq 0$.

Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente teorema que caracteriza a las matrices invertibles:



Teorema: Sea $A \in M_n(\kappa)$; entonces

A invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

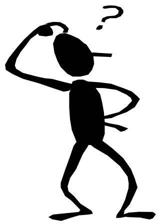
Y en este caso se tiene que $A^{-1} = \left(\dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right)$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$, y $ad - bc \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Calcule la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$



Ejercicio: **Es verdadero o falso que para matrices A, B invertibles de orden n se tiene que:**

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

2. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. $(A^{-1})^{-1} = A$

Ejercicio: **Determine todos los valores reales de k de modo que las siguientes matrices sean invertibles:**

$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2k \\ 3 & 1 & k-2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales – Matrices escalonadas

Para una matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$ consideraremos las siguientes **"operaciones elementales con las filas de A"**:

- **Permutar dos filas**: Si se permuta la fila i con la fila j anotamos

$$F_{ij}$$

- **Multiplicar una fila por un número real**: Si se multiplica la fila i por el número $\alpha \neq 0$, esta operación se anota

$$\alpha F_i$$

- **Sumar dos filas**: Si la fila i se suma a la fila j, anotamos

$$F_i + F_j$$

- Finalmente, podemos combinar las dos últimas operaciones y obtener $\alpha F_i + F_j$

Ejercicio: **Verifique que si se realizan las operaciones elementales indicadas con las filas de la matriz A, se obtiene la matriz E.**

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\ F_{12},\ -2F_1+F_2,\ F_1+F_3,\ F_{23},\ 2F_2+F_3,\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A,\ B\in M_{mxn}(\kappa)$ y si B se obtiene realizándole a la matriz A un número finito de operaciones elementales, entonces se dice que **A es equivalente a B** y se anota $A \approx B$. Por ejemplo, las matrices A y E del ejercicio anterior son equivalentes.

La matriz E del ejercicio anterior tiene una forma muy particular, es una matriz del tipo escalonada. A continuación damos una definición de matriz escalonada:

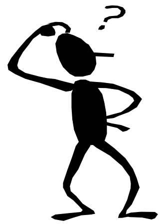
Una matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$ se llama **matriz escalonada** si satisface las siguientes condiciones:

- Las filas que tengan todas sus componentes iguales a cero deben estar ubicadas debajo de aquellas que tengan componentes no nulas.
- La primera componente no nula de cada fila no nula es 1, vista de izquierda a derecha. Esta componente se llama “uno distinguido o uno capital”.
- El número de ceros al comienzo de una fila aumenta a medida que se desciende en la matriz.

Si además A satisface lo siguiente:

- Todas las componentes de la columna donde aparece un 1 distinguido son ceros,

la matriz A se llama **escalonada reducida por filas**.

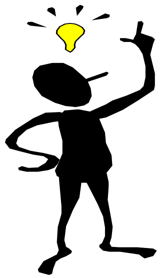


Ejercicio: Decida si las siguientes matrices son o no son escalonadas. ¿Son escalonadas reducidas por filas?

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Teorema: Toda matriz $A \in M_{mxn}(\kappa)$ es equivalente a una matriz $E \in M_{mxn}(\kappa)$ del tipo escalonada reducida por filas.

Si $A \in M_{mxn}(\kappa)$, entonces $A \approx E$, con E matriz escalonada reducida por filas. Se define el **rango de A** como el número de filas no nulas de E, que equivale al número de "unos distinguidos" de E. El rango de A lo denotaremos por **r(A)**.



El rango de la matriz nula es cero: r(O) = 0.

El rango de la matriz identidad de orden n es n: $r(I_n) = n$

El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es 2. ¿Por qué?

Ejercicio: Determine todos los valores reales de a de modo que el rango de la matriz M sea 3 si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Estudie el rango de la matriz A, dependiendo de los valores reales de k si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Un teorema que caracteriza a las matrices invertibles es:

Teorema: Sea $A \in M_n(\kappa)$; entonces

$$A \text{ invertible} \Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow A \approx I_n$$

Y si una sucesión de operaciones elementales fila reducen A a la matriz identidad I_n, entonces esa misma sucesión de operaciones elementales fila cuando se aplican a I_n proporcionan A^{-1}.

Ejercicio: **Aplique la última parte del teorema para calcular la inversa de cada una de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Las operaciones elementales también se pueden realizar con las columnas de la matriz.

Sin embargo, para los objetivos de este curso, usaremos sólo operaciones elementales con las filas de la matriz.

Ejercicio: **Determine el rango de la siguiente matriz compleja:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Una **matriz elemental** es aquella que se obtiene al realizar una operación elemental a la matriz identidad I_n.

Usaremos las siguientes notaciones para las matrices elementales:

$$E_{ij} \;:\; \text{se obtiene al realizar } F_{ij} \text{ a } I_n$$

$$E_i(\alpha) \;:\; \text{se obtiene al realizar } \alpha F_i \text{ a } I_n$$

$$E_{ij}(\alpha) \;:\; \text{se obtiene al realizar } \alpha F_i + F_j \text{ a } I_n$$

Por ejemplo, para orden 3,

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{13}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observaciones

(1) Existe una equivalencia entre realizar a la matriz A una operación elemental fila y multiplicar, por la izquierda, la matriz A por una matriz elemental. A saber,

$E_{ij}\cdot A$	corresponde	a realizar a A	la operación	elemental	F_{ij}
$E_i(\alpha)\cdot A$	“	“	“	“	$\alpha\, F_i$
$E_{ij}(\alpha)\cdot A$	“	“	“	“	$\alpha F_i + F_j$

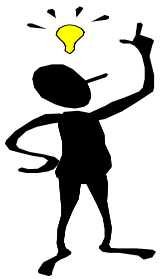
(2) Las matrices elementales son invertibles; en efecto,

$$E_{ij}\cdot E_{ij} = I_n$$

$$E_i(\alpha)\cdot E_i(\tfrac{1}{\alpha}) = I_n$$

$$E_{ij}(\alpha)\cdot E_i(-\alpha) = I_n$$

(3) La inversa de una matriz elemental es también una matriz elemental.



Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema enunciado antes y que caracteriza a las matrices invertibles.

Teorema: Sea $A \in M_n(\kappa)$; entonces

A invertible $\Leftrightarrow$ $A \approx I_n$

i) Supongamos que A es invertible y que $A \approx E$, con E matriz escalonada reducida por filas, $E \neq I_n$. Entonces E tiene por lo menos una fila de ceros y por tanto $\det(E) = 0$.

Pero si $A \approx E$, el determinante de A difiere del determinante de E en el signo o en un factor numérico. En cualquier caso concluimos que $\det(A) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto se debe tener $A \approx I_n$.

i) Supongamos que $A \approx I_n$; entonces I_n se obtiene realizando una sucesión de operaciones elementales fila a la matriz A. Esto quiere decir que $E_k\ E_{k-1}\ .\ .\ .\ .\ E_2\ E_1\ A = I_n$, con $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales. Como las matrices elementales son invertibles podemos expresar

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(E_1^{-1}) \cdot \ldots \cdot \det(E_k^{-1})$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\Rightarrow A \quad \text{invertible}$$

Del teorema siguen los siguientes corolarios:

(1) $A \in M_n(\kappa)$ A invertible $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

(2) $A \in M_n(\kappa)$ **,** A invertible $\Leftrightarrow$ A es producto de matrices elementales.

Esto último sugiere otro método para calcular la inversa de A:

$$E_k \cdot \ldots\ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = E_k \cdot \ldots\ldots \cdot E_2 \cdot E_1$$

Además, prueba el enunciado hecho antes: *Si una sucesión de operaciones elementales fila reducen A a la matriz identidad* I_n, *entonces esa misma sucesión de operaciones elementales fila cuando se aplican a* I_n *proporcionan* A^{-1}.

Ejercicio: Exprese la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **como producto de matrices elementales.**

Factorización LU

Sea $A \in M_n(\kappa)$. Si al escalonar A no es necesario realizar permutación de filas, entonces A puede factorizarse como el producto LU donde:

- L es una matriz triangular inferior con todos los elementos de su diagonal iguales a 1.
- U es una matriz triangular superior con los elementos pivotes en la diagonal.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite factorización LU. En efecto,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ cx & cy + dz \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad ax = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a = 0 \quad \vee \quad x = 0)$$

$$\Rightarrow \quad L \quad o \quad U \quad \text{no invertible}$$

$$\Rightarrow \quad A \quad \text{no invertible}$$

Lo que es una contradicción pues det(A) = -1.

Este ejemplo muestra que,

$$\boxed{A \quad \text{invertible} \quad \not\Rightarrow \quad A \ \text{admite factorización LU}}$$

Ejemplo: Encontremos la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{-F_1+F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{-F_2+F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

Lo anterior se expresa con matrices elementales así:

$$E_{23}(-1) \cdot E_{13}(-1) \cdot A = U$$

$$\Rightarrow \quad A = (E_{23}(-1))^{-1} \cdot (E_{13}(-1))^{-1} \cdot U$$

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{E_{13}(1) \cdot E_{23}(1)}_{\mathbf{L}} \cdot U$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \quad \mathbf{U}$$

Efectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De lo realizado se puede concluir que la factorización LU de una matriz A no es única.

Ejercicio: Encuentre una descomposición LU para las matrices A y B siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

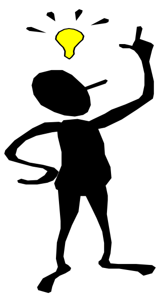
Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se expresa

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\Re)$ es la **matriz de los coeficientes** del sistema y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots\ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ son las (matrices) columnas de **incógnitas** y de **términos constantes** respectivamente.

Los números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, formalmente $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ que satisfacen cada una de las ecuaciones de (*) forman una **solución del sistema** (*).

El sistema (*) se dice **compatible** si posee al menos una solución y se dice **incompatible** cuando no tiene solución.



Observe que el sistema (*) equivale a la ecuación matricial AX = B, con A la matriz de orden m x n formada con los coeficientes del sistema, X la matriz columna de incógnitas y B la matriz columna de términos constantes.

Ejercicio: **Escriba la ecuación matricial AX = B que representa a los sistemas:**

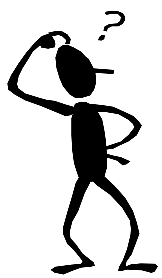
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 & = & -1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Ejercicio: **Escriba el sistema de ecuaciones lineales AX = B que corresponde a las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

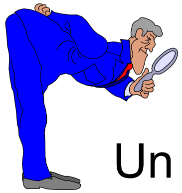
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Problema: **Haga el planteamiento matemático del siguiente problema: Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas, estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de una unidad de cada uno de los cuatro productos está dado en la tabla.**



	Prod 1	Prod 2	Prod 3	Prod 4
Máq 1	1	2	1	2
Máq 2	2	0	1	1
Máq 3	1	2	3	0

¿Cuántas unidades de cada producto se deben producir en un día, con el fin de usar plenamente las máquinas?



Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales se dice **homogéneo** cuando la columna de términos constantes está formada sólo por ceros.

Sea $AX = O$, con $A \in M_{mn}(\Re)$ un sistema homogéneo; entonces:

1. $AX = O$ es siempre compatible pues $X = O$ es solución de él.
2. Si $E \in M_{mn}(\Re)$ es tal que $A \approx E$, entonces los sistemas (equivalentes) $AX = O$ y $EX = O$ tienen las mismas soluciones.
3. Si el rango de A, $r(A) = n$, entonces $X = O$ es la única solución de $AX = O$.
4. Si el rango de A, $r(A) < n$, entonces existen infinitas soluciones para $AX = O$. Estas se pueden expresar en términos de uno o más parámetros.

Resolución de sistemas homogéneos

Ejemplo 1

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

La matriz de este sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Con A, realizamos operaciones elementales fila hasta obtener E

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Como r(A) = 3 = N° columnas de A = N° de incógnitas, el sistema tiene solución única y ésta es la misma que tiene EX = O, es decir,

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, que nos permitimos escribir S = (0, 0, 0)

Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ -1x_1 - 7x_2 + 15x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & -7 & 15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Como r(A) = 2 < N° columnas de A (N° de incógnitas), el sistema tiene infinitas soluciones. Estas las buscamos en el sistema EX = O:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & 2x_3 \end{array}\right|$$

Asignamos a x_3 el parámetro λ con el fin de expresar las infinitas soluciones así:

$$S = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda;\ \lambda \in \Re.$$ O también, $S = (1, 2, 1)\ \lambda,\ \lambda \in \Re$

Ejemplo 3: Resolvamos el sistema de 4 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y + 4z + 5u & = & 0 \\ 2x + 3y - 7z & = & 0 \end{array}\right|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -15 & -10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = E$$

En este caso, r(A) = 2 < N° columnas de A (N° de incógnitas) y el sistema tiene infinitas soluciones. El sistema equivalente EX = O es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + z + 3u & = & 0 \\ y - 3z - 2u & = & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & -z - 3u \\ y & = & 3z + 2u \end{array}\right|$$

Asignamos dos parámetros: $z = \lambda$, $u = \mu$. Las infinitas soluciones se expresan:

$$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu ;\ \lambda ,\ \mu \in \Re.$$

O también, $S = (-1, 3, 1, 0)\lambda + (-3, 2, 0, 1)\mu;\ \lambda, \mu \in \Re$

Ejemplo 4: Determinemos todos los valores de k de modo que el siguiente sistema tenga soluciones distintas de X=O, es decir, soluciones no triviales.

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ x_2 + (k-1)x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

El sistema tendrá soluciones no triviales si y sólo si r(A) < 3 = N° columnas de A (N° de incógnitas del sistema).

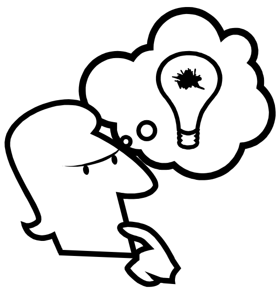
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix} = E$$

Por lo tanto el valor de k buscado es k = 3, en cuyo caso las múltiples soluciones del sistema se pueden expresar:

$$(-1,\ -2,\ 1)\lambda\ ; \quad \lambda \in \Re$$

Ejercicio: **Determine todos los valores reales de k de modo que el siguiente sistema tenga soluciones no triviales:**

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + kx_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right|$$



Ejercicio: **¿Para qué valores del número real a, el sistema AX = O tiene solución única? Aquí A es la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos

Consideremos el sistema no homogéneo AX = B, de m ecuaciones lineales con n incógnitas, donde $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\Re)$ y

$$B = (b_1,\ b_2, \ldots\ldots, b_m)^t \in M_{mx1}(\Re)$$

Llamaremos **matriz ampliada** (o matriz aumentada) del sistema AX = B a:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Se tiene que:

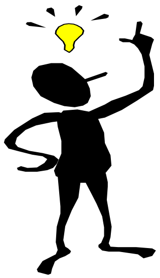
El sistema $AX = B$ es compatible si y sólo si $r(A) = r(A; B)$

O equivalente,

El sistema $AX = B$ es incompatible si y sólo si $r(A) \neq r(A; B)$.

Supongamos que $AX = B$, sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es compatible.

1. Si $r(A) = r(A; B) = n$, entonces $AX = B$ tiene solución única.
2. Si $r(A) = r(A; B) < n$, entonces $AX = B$ tiene infinitas soluciones que se pueden expresar en términos de uno o más parámetros.



Si el sistema $AX = B$ tiene n ecuaciones y n incógnitas, A es una matriz cuadrada de orden n. Y si el rango de A, r(A) = n, entonces r(A; B) también es n, A es invertible y la única solución del sistema la podemos encontrar a través de la inversa de A:

$$\mathbf{X = A^{-1}B}$$

Ejercicio: **En las condiciones anteriores, ¿por qué $X = BA^{-1}$ no es solución del sistema?**

Ejercicio: **Usando la inversa de la matriz del sistema, resuelva**

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 & = & -2 \end{array}$$

Resolución de sistemas no homogéneos

Ejemplo 1:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+4y-3z & = & -3 \\ 3x+6y-z & = & 1 \end{array}\right|$$

$$(A;B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & 8 & 10 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -5/3 \end{array}\right)$$

En este caso, r(A) = 2 = r(A; B) y el sistema es compatible. Como n = N° de incógnitas = 3, el sistema tiene infinitas soluciones; las buscamos en:

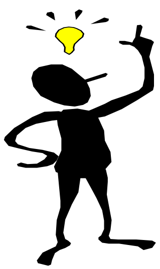
$$\left.\begin{array}{rcr} x+7/3\,z & = & 11/3 \\ y-4/3\,z & = & -5/3 \end{array}\right|$$

Soluciones: $\left(\frac{-7}{3},\ \frac{4}{3},\ 1\right)\lambda+\left(\frac{11}{3},\ \frac{-5}{3},\ 0\right);\quad \lambda\in\Re$

Ejemplo 2: Estudiemos la compatibilidad del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ 5x_2 - x_3 & = & c \end{array}\right|$$

$$(A;B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 5 & -1 & c \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 5 & -1 & c \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b+c \end{array}\right)$$



Por lo tanto, el rango de A es 2.

El sistema será compatible si y sólo si

$$r(A;B) = 2,$$

lo que equivale a que a, b, c deben cumplir,

$$2a - b + c = 0$$

Ejemplo 3: Determinemos los valores reales de m de manera que el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ mx_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = & -1 \end{array}\right|$$

i) Tenga solución única

ii) Posea múltiples soluciones

iii) Sea incompatible

$$(A;B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 1 & 1 & m & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-2 & -2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2m-2 & -3 \\ 0 & 1 & 2-m & 2 \\ 0 & 0 & (m-1)^2 & 2(1-m) \end{array}\right)$$

i) Para cualquier número real m, m $\neq$ 1, r(A) = 3 = r(A; B) y el sistema tiene solución única. En este caso,

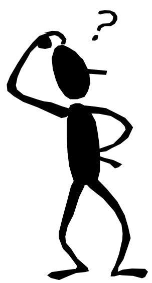
$$(A;B) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2(m-1) & -3 \\ 0 & 1 & 2-m & 2 \\ 0 & 0 & (m-1)^2 & 2(1-m) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{m-1} \end{array}\right)$$

Y la solución es: $S = \left(1, \ \frac{2}{m-1}, \ \frac{-2}{m-1}\right), \quad m \neq 1$

ii) Si m = 1, $(A;B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **, r(A) = 2 = r(A; B) y el sistema tiene múltiples soluciones que se expresan:**

$$(0, \ -1, \ 1)\,\lambda + (-3, \ 2, \ 0)\,; \quad \lambda \in \Re$$

iii) Para ningún número real m, el sistema es incompatible.



Ejercicio: **Analice las soluciones del sistema**

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}\right|$$

dependiendo de los valores que tome el número real a.

Ejercicio: **Resuelva el sistema**

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + kx_2 + kx_3 &= 2k \\ x_1 + kx_2 - kx_3 &= k \end{aligned}\right|$$

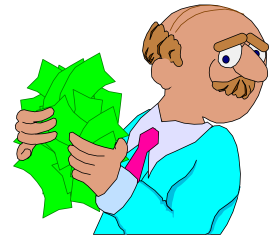
Para todos los valores reales de k para los cuales existen múltiples soluciones.

¿Para algún valor de k, el sistema resulta ser incompatible?

Problema: **Una persona invierte US$20.000 en tres diferentes negocios que proporcionan utilidades del 5%, 6% y 8% respectivamente.**

La ganancia anual total de las tres inversiones es US$1.266.

Determine la cantidad depositada en cada negocio si se sabe que la utilidad del negocio al 8% es igual a dos veces la ganancia que deja el negocio al 5%.



Determine la cantidad depositada en cada negocio si se sabe que la utilidad del negocio al 8% es igual a dos veces la ganancia que deja el negocio al 5%.

La Regla de Cramer

La Regla de Cramer nos proporciona un método para resolver ciertos sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Sea A matriz de orden n y consideremos el sistema de ecuaciones lineales AX = B. Si det (A) $\neq$ 0, entonces A es invertible y la única solución del sistema es $X = A^{-1}B$.

La Regla de Cramer nos entrega otra manera de hallar esta única solución de AX = B a través de los determinantes; asegura que,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,\ 2, \ldots\ldots, n$$

donde $\Delta = \det(A)$ y Δ_i es el determinante de la matriz que se obtiene al sustituir la i-ésima columna de A por la columna B de términos constantes.

Ejemplo: Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ mx_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + mx_3 &= -1 \end{aligned}\right|$$

para todos los valores de m que hacen que este sistema tenga solución única.

En este caso $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2$

Luego $\forall m \in \Re - \{1\}$, $\Delta = \det(A) \neq 0$ y el sistema tiene solución única. Calculemos la solución:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2} = \frac{2(m-1)}{(m-1)^2} = \frac{2}{m-1}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(m-1)^2} = \frac{-2(m-1)}{(m-1)^2} = \frac{-2}{m-1}$$

Solución: $S = \left(1, \ \frac{2}{m-1}, \ \frac{-2}{m-1}\right), \quad m \neq 1$

Problema: **Suponga que dos productos A y B compiten y que las demandas Q_A y Q_B de estos productos están relacionadas con sus precios p_A y p_B por las ecuaciones de demanda:**

$$Q_A = 17 - 2p_A + \frac{1}{2}p_B\,,$$

$$Q_B = 207 - 3p_A + \frac{1}{2}p_B$$

Las ecuaciones de la oferta son:

$$p_A = 2 + Q_A + \frac{1}{3}Q_B\,,$$

$$p_B = 2 + \frac{1}{2}Q_A + \frac{1}{4}Q_B$$

que indican los precios a los cuales las cantidades estarán disponibles en el mercado. En el punto de equilibrio del mercado las cuatro ecuaciones deben satisfacerse. Calcule los valores de equilibrio de Q_A, Q_B, p_A y p_B.

Sistemas lineales y factorización LU

Consideremos el sistema $AX = B$, donde A es una matriz de orden n que admite una descomposición LU. Si $AX = B$ tiene solución única, ésta se puede obtener de la manera que se indica a continuación:

$$\boxed{AX = B \quad \Leftrightarrow \quad LU\,X = B \quad \Leftrightarrow \quad LY = B, \quad \text{con} \quad Y = UX}$$

Ejemplo: Resolvamos el sistema

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & -2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 & = & -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 7 \end{array}$$

La matriz A del sistema admite una factorización LU así:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{L}\times\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}_{U}$$

Resolvemos L**Y** = B,

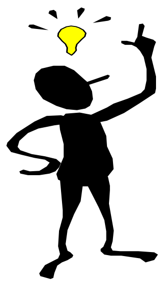
$$\left.\begin{array}{rcr} y_1 & = & -2\\ -y_1+y_2 & = & 4\\ 3y_1-2y_2+y_3 & = & -1\\ 2y_1+y_3+y_4 & = & 7\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad Y=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 9\\ 2\end{pmatrix}$$

Finalmente, resolvemos U **X** = Y,

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & -2 \\ x_2 + x_3 & = & 2 \\ 4x_3 - 3x_4 & = & 9 \\ 2x_4 & = & 2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema

Espacios vectoriales

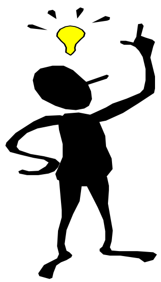


En el estudio de las matrices y, en particular, de los sistemas de ecuaciones lineales realizamos sumas y multiplicación por escalares con un tipo especial de matrices, las de orden nx1.

Abusando del lenguaje y la notación establecimos la correspondencia:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longleftarrow - - - \longrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Es decir, aceptamos que $M_{nx1}(\Re) \cong \Re^n$, con el fin de aprovechar la familiaridad que se tiene con los espacios $\Re^2$ y $\Re^3$.



En este capítulo estudiaremos conjuntos que poseen propiedades algebraicas similares a $\Re^n$.

A dichos conjuntos se les dará el nombre de **espacios vectoriales** y a sus elementos el nombre de vectores.

En lo que sigue K designará al cuerpo $\Re$ de los números reales o al cuerpo C de los números complejos.

Espacios y subespacios vectoriales

Un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathcal{K}$ es un conjunto de objetos V con dos operaciones:

(1) $+ : V \times V \longrightarrow V$; $(u, v) \dashrightarrow u + v$

que es asociativa, conmutativa, posee elemento neutro (cero) y cada elemento posee un inverso.

(2) p: $\mathcal{K} \times V \longrightarrow V$; $(\alpha, v) \dashrightarrow \alpha \cdot v$

que satisface lo siguiente:

i) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v; \quad \forall \alpha, \beta \in \kappa; \quad \forall v \in V$

ii) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v; \quad \forall \alpha, \beta \in \kappa; \quad \forall v \in V$

iii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \quad \forall \alpha \in \kappa; \quad \forall u, v \in V$

iv) $1 \cdot v = v; \quad \forall v \in V$, con 1 elemento unidad de $\mathcal{K}$

La operación (1) es interna en V; se llama **suma o adición**. La operación (2) es externa y se llama **multiplicación por escalar o ponderación**.

Los elementos de V se llaman **vectores** y los de K **escalares**. Si $\mathrm{K} = \Re$, se dice que V es un **espacio vectorial real**. Si K = C, el espacio vectorial V se dice complejo.

En cualquier espacio vectorial V sobre K se tiene que:

a) $0 \cdot v = 0, \quad \forall v \in V$

b) $\alpha \cdot 0 = 0, \quad \forall \alpha \in \kappa$

c) $\alpha \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha = 0 \quad \vee \quad v = 0)$

d) $(-1) \cdot v = -v, \quad \forall v \in V$

Ejemplos de espacios vectoriales

(1) Para n número natural, sea $\Re^n = \Re \times \ldots\ldots \times \Re$ (n veces), es decir,

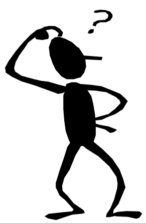
$$\Re^n = \{(x_1, \ldots\ldots, x_n) \ / \ x_i \in \Re, \ \forall i = 1, \ldots\ldots, n\}$$

$\Re^n$ con las operaciones siguientes:

$$(x_1, \ldots\ldots, x_n) + (a_1, \ldots\ldots, a_n) = (x_1 + a_1, \ldots\ldots, x_n + a_n)$$

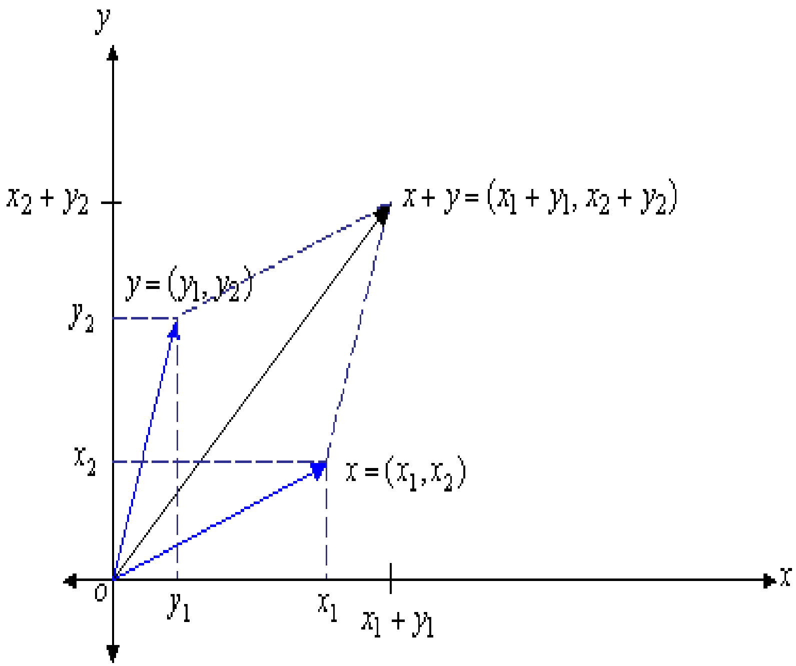
$$\alpha (x_1, \ldots\ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots\ldots, \alpha x_n), \ \alpha \in \Re$$

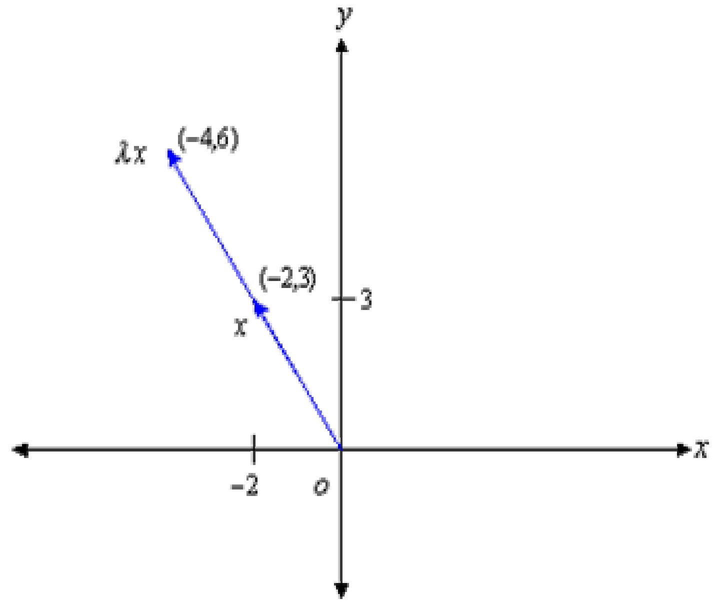
es un espacio vectorial real.



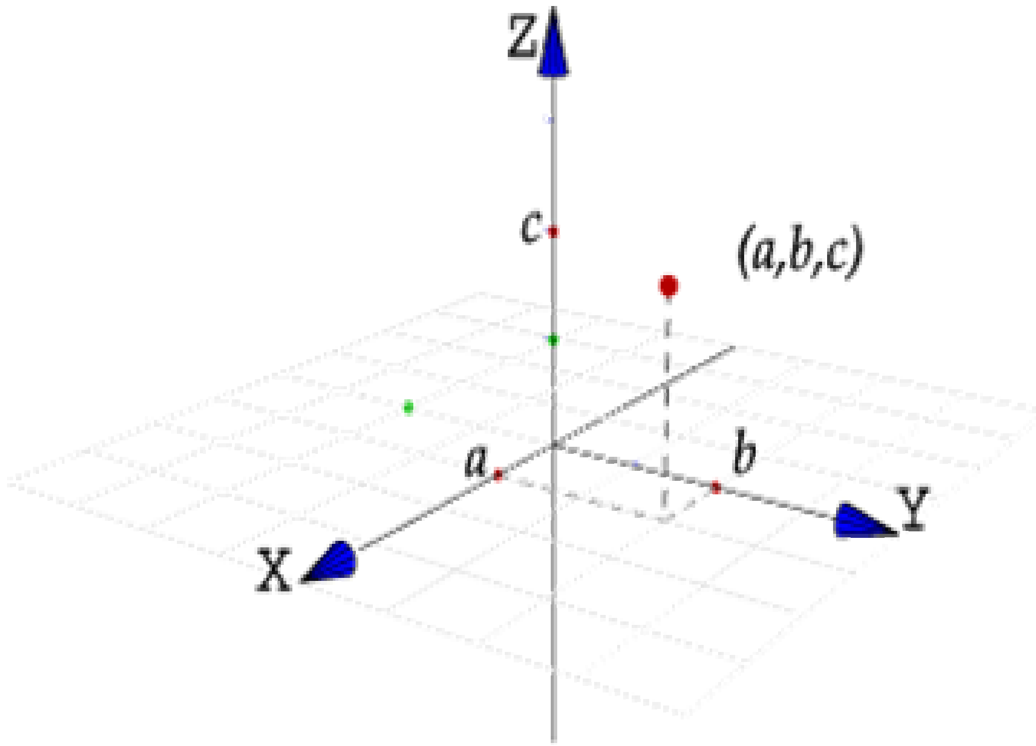
En consecuencia, $\Re$ es un espacio vectorial sobre sí mismo.

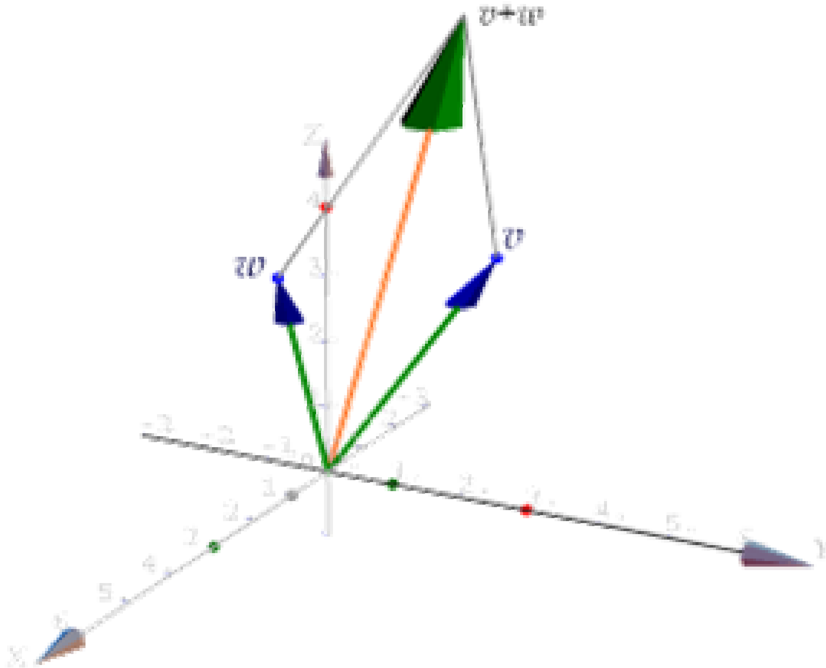
El espacio vectorial real $\Re^2$



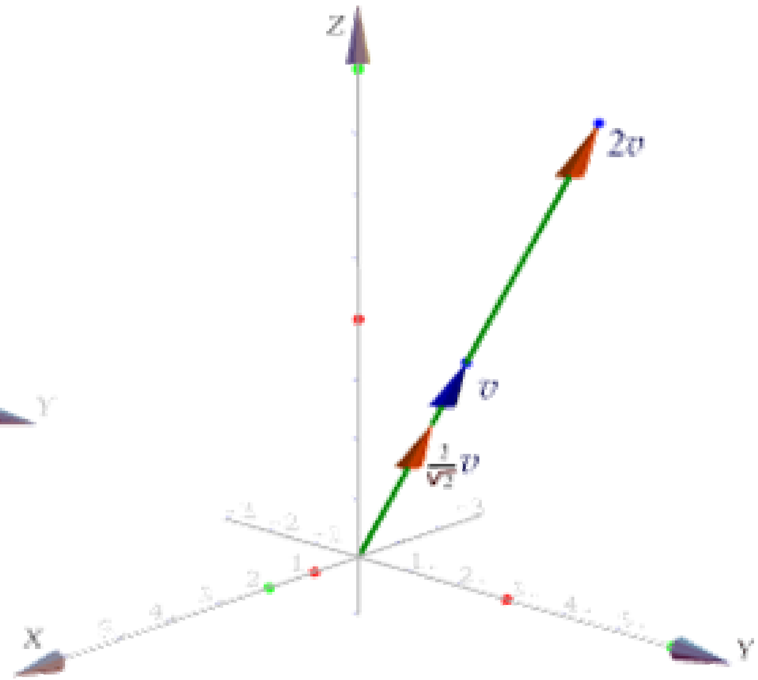


El espacio vectorial real $\Re^3$





Suma en $\Re^3$



Ponderación en $\Re^3$

(2) No sólo $\Re$ es un espacio vectorial sobre $\Re$. Si IK es un cuerpo, IK es un espacio vectorial sobre si mismo. En este caso, la ponderación coincide con la multiplicación del cuerpo IK. En consecuencia, C (números complejos) es un espacio vectorial complejo. Pero C también es un espacio vectorial real si se considera la ponderación:

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi\,, \quad \alpha \in \Re$$

(3) Para $m, n \in IN$, el conjunto $M_{mxn}(\Re)$ de las matrices reales de orden mxn, con las operaciones suma y multiplicación habituales de las matrices, es un espacio vectorial real.

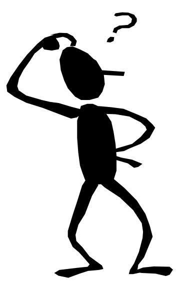
(4) El conjunto $\Re[x]$ de los polinomios en x con coeficientes reales, con las operaciones suma y ponderación usuales, es un espacio vectorial sobre $\Re$.

(5) Para n número natural, denotemos por

$$P_n[x] = \{p(x) \in \Re[x] \ / \ p(x) \text{ de grado } \leq n\}$$

$P_n[x]$, con las operaciones suma y multiplicación por escalares reales, es un espacio vectorial real.

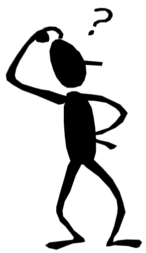
(6) Si $A \subseteq \Re$, el conjunto $F(A, \Re) = \{f : A \rightarrow \Re \ / \ \text{función}\}$, con la suma y ponderación usuales de las funciones, es un espacio vectorial sobre $\Re$.



¿Cuál es el elemento cero de los siguientes espacios vectoriales reales?

$\Re^n$, $M_{mxn}(\Re)$, $P_n[x]$ y $F(A, \Re)$

Los siguientes conjuntos, con las operaciones suma y ponderación habituales de los respectivos espacios, no son espacios vectoriales reales.



$$A = \{(x, y) \in \Re^2 \ / \ y = 2x - 3\}$$

$$B = \{a + 5x^2 \in P_2[x] \ / \ a \in \Re\}$$

$$C = \{A \in M_n(\Re) \ / \ \det(A) \neq 0\}$$

$$D = \{f \in F(\Re, \Re) \ / \ f \text{ creciente en } \Re\}$$

Ejercicio: Demuestre que los conjuntos A, B, C y D mencionados anteriormente, no son espacios vectoriales reales.

Cuando un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con las operaciones de V restringidas a sus elementos, resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces se dice que W es un **subespacio vectorial** (o subespacio lineal o simplemente subespacio) **de V.**

Por lo tanto,

$$W \text{ es un subespacio de } V \Rightarrow 0_V \in W$$

O equivalentemente,

$$0_V \notin W \Rightarrow W \text{ no es subespacio de } V$$

El siguiente teorema caracteriza a los subespacios de V.

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y W un subconjunto no vacío de V. W es un subespacio de V si y sólo si

i) $\forall\, u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$

Del teorema anterior sigue que, si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces V y $\{ 0 \}$ son subespacios vectoriales de V.

Ejemplo: El conjunto $D = \{(x,\ y) \in \Re^2 \ /\ \ y = x^2\}$ no es un subespacio de $\Re^2$ pues, por ejemplo, u = (2, 4) $\in$ D, v = (3, 9) $\in$ D y u + v = (5, 13) $\notin$ D.

Ejemplo: El conjunto $W = \{(x,\ y,\ z) \in \Re^3 \ /\ 2x - z = 0\}$ es un subespacio de $\Re^3$; en efecto,

$$W = \{(x,\ y,\ 2x) \ \ /\ \ x\ ,\ y\ \in \Re\}$$

y se tiene que,

i) 0 = (0, 0, 0) $\in W$ y $W \neq \emptyset$

ii) (x, y, 2x) + (a, b, 2a) = (x + a, y + b, 2(x + a)) $\in$ W

iii) $\alpha(x, y, 2x) = (\alpha x, \alpha y, 2\alpha x) \in W$

En virtud del teorema enunciado anteriormente, W es un subespacio de $\Re^3$.

Ejemplo: El conjunto $U = \{ A \in M_n(\Re)$ / A es simétrica$\}$ es un subespacio de $M_n(\Re)$; efectivamente,

i) $O_n \in U$; puesto que la matriz nula es simétrica.

Luego $U \neq \emptyset$

i) $A, \ B \in U \Rightarrow (A^t = A \ \wedge \ B^t = B)$

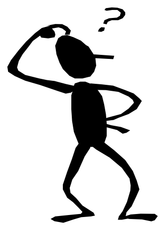
$$\Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t = A + B$$

$$\Rightarrow A + B \in U$$

ii) $(\alpha \in \Re \ \wedge \ A \in U) \Rightarrow (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$

$$\Rightarrow \alpha A \in U$$

Por lo tanto, W es un subespacio de $M_n(\Re)$.



Ejercicio: Muestre 3 ejemplos de conjuntos que sean subespacios de $\Re^3$ y 3 conjuntos que no sean subespacios de $\Re^3$.

Ejercicio: Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios del respectivo espacio.

$$S_1 = \{(x,\ y) \in \Re^2 \ / \ y = 4x\}$$

$$S_2 = \{a + bx + c\,x^2 \in P_2[x] \ / \ a + 2c = 0\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z, t) \in \Re^4 \ / \ x + 3y + 4t = 0 \ \wedge \ y - z + 2t = 0\}$$

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re) \ / \ 3a + b - d = 0 \ \wedge \ 2c - b = 0 \right\}$$

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre κ y sean U y W subespacios de V. Entonces $U \cap W$ es un subespacio de V.

Efectivamente, como 0_V pertenece a U y también a W, $0_V \in U \cap W$. Además si u, v son vectores de $U \cap W$,

$$u \in U \ \wedge \ u \in V \ \wedge \ v \in U \ \wedge \ v \in W$$

$$\Rightarrow \ u + v \in U \ \wedge \ u + v \in W$$

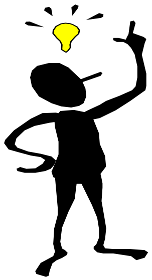
$$\Rightarrow \ u + v \in U \cap W$$

Finalmente, si $u \in U \cap W$ y $\alpha \in \kappa$,

$$u \in U \ \wedge \ u \in W$$

$$\Rightarrow \ \alpha u \in U \ \wedge \ \alpha u \in W$$

$$\Rightarrow \ \alpha u \in U \cap W$$



Es posible demostrar que la intersección de cualquier colección de subespacios de un espacio vectorial V es un subespacio de V.

También es fácil mostrar que la unión de dos subespacios de un espacio vectorial V no es un subespacio de V.

Por ejemplo, considere los subespacios de $\Re^2$:

$$U = \{ (x, y) \ / \ y = 2x \}$$

$$W = \{ (x, y) \ / \ y = 3x \}$$

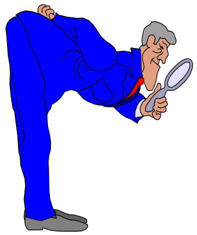
Entonces $U \cup W$ no es un subespacio de $\Re^2$.

¿Por qué?

Combinaciones lineales - generadores

Sea V es un espacio vectorial sobre κ y $S = \{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V. Una **combinación lineal** de vectores de S (o de $v_1, \ldots\ldots, v_n$) es un vector de la forma $v = \alpha_1 v_1 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n,$ donde $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n \in \kappa$.

Por ejemplo, el vector v = (-1, -2, 7) del espacio $\Re^3$ es combinación lineal de los vectores s = (1, -4, 3) y t = (-2, 5, -1) puesto que v = 3 s + 2 t.



El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S resulta ser un subespacio vectorial de V; se llama **espacio generado por S** (o espacio generado por $v_1, \ldots, v_n$) y se denota <S> o $<\{v_1, \ldots, v_n\}>$.

Ejemplo: Determinemos el subespacio generado por los vectores $v_1 = (1, 0, 2)$ y $v_2 = (0, -1, 1)$ de $\Re^3$:

$$
\begin{aligned}
<\{v_1, v_2\}> &= \{ \alpha v_1 + \beta v_2 \ / \ \alpha, \beta \in \Re \} \\
&= \{ \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, -1, 1) \ / \ \alpha, \beta \in \Re \} \\
&= \{ (\alpha, -\beta, 2\alpha + \beta) \ / \ \alpha, \beta \in \Re \} \\
&= \{ (x, y, z) \in \Re^3 \ / \ z = 2x - y \}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Sea $S = \{ 2 - 5x + x^2, \ \ 1 - 3x + 2x^2 \} \subset P_2[x]$

¿El vector $p(x) = 2 - 4x - 5x^2$ pertenece a $< S >$?

La pregunta equivale a ¿existen $\alpha, \beta \in \Re$ tales que

$$\alpha(2 - 5x + x^2) + \beta(1 - 3x + 2x^2) = 2 - 4x - 5x^2 ?$$

Esta igualdad nos conduce a

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 2 \\ -5\alpha - 3\beta &= -4 \\ \alpha + 2\beta &= -5 \end{aligned}\right|$$

Sistema que resulta incompatible y, en consecuencia,

$p \notin < S >$

Ejercicio: **Determine si las siguientes afirmaciones, relativas a un espacio vectorial V, son verdaderas o falsas:**

A) $0 \in < S >, \quad \forall\, S \subseteq V$

B) $\forall k = 1, \ldots, n, \quad v_k \in < \{v_1, \ldots, v_n\} >$

C) $S \subseteq T \Rightarrow \; < S > \; \subseteq \; < T >$

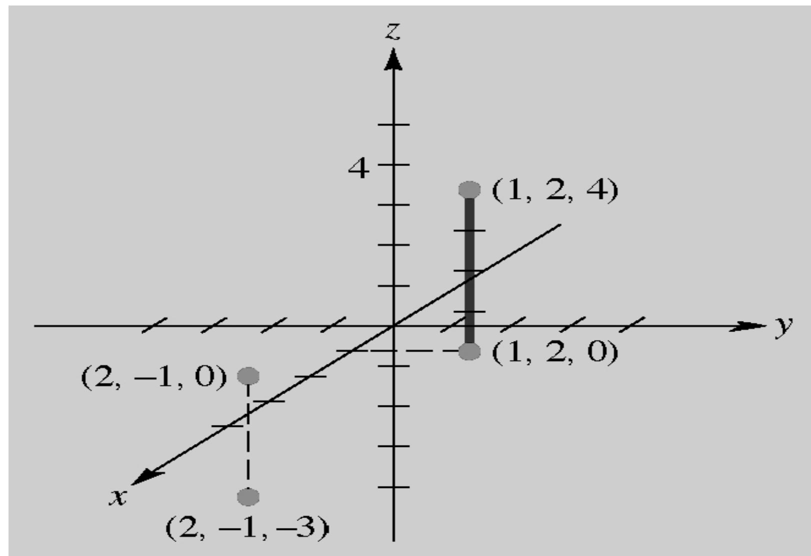
D) $< S > = < T > \; \Rightarrow \; S = T$

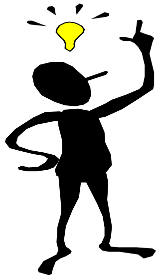
Si V es un espacio vectorial y S es un subconjunto de V, puede ocurrir que < S > = V; en este caso se dice que **S genera a V** o que **V está generado por S**.

Ejemplo: Consideremos los vectores de $\Re^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$. Entonces $\{e_1, e_2, e_3\}$ genera al espacio $\Re^3$; en efecto,

$$
\begin{aligned}
<\{e_1, e_2, e_3\}> &= \{a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \ / \ a, b, c \in \Re\} \\
&= \{(a,b,c) \ / \ a, b, c \in \Re\} \\
&= \Re^3
\end{aligned}
$$

Puntos en el espacio $\Re^3$

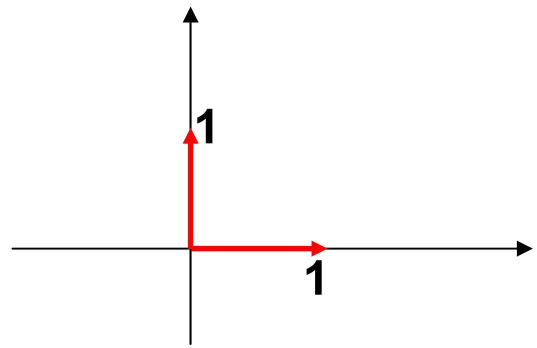




$\Re$ está generado por $e_1 = 1$

$\Re^2$ está generado por

$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$



$P_2[x]$ está generado por $\{1, x, x^2\}$ puesto que

$$a + bx + cx^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$$

¿Cuáles son los generadores "naturales" de $M_2(\Re)$?

Dependencia lineal

En $\Re^4$, consideremos los vectores u = (1, 0, -1, 0), v = (0, 1, 0, -1) y w = (1, -1, -1, 1). Entonces,

< {u, v, w} > = $\{(\alpha + \gamma, \beta - \gamma, -\alpha - \gamma, -\beta + \gamma) \mathbin{/} \alpha, \beta, \gamma \in \Re\}$

= {(a, b, c, d) / a + c = 0 y b + d = 0 }

Por otra parte,

< {u, v} > = $\{(\alpha, \beta, -\alpha, -\beta) \mathbin{/} \alpha, \beta \in \Re\}$

= {(a, b, c, d) / a + c = 0 y b + d = 0]

Es decir, < {u, v, w} > = < {u, v} >. Este hecho no es casual, se deriva de la "dependencia lineal" que existe entre u, v, w que, en este caso, significa w = u – v.

Sea V espacio vectorial sobre K y $S = \{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V. Se dice que S es **linealmente dependiente** (l.d.) si existen escalares $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n$ no todos nulos tales que $\alpha_1 v_1 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n = 0$

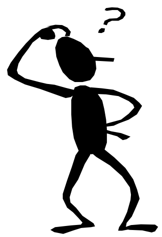
Si S no es l.d., se dice que S es **linealmente independiente** (l.i.). Por lo tanto S es l. i. si

$$\alpha_1 v_1 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0, \ \forall i = 1, \ldots\ldots, n$$

Por ejemplo, los vectores e_1, e_2, e_3 de $\Re^3$ son l. i.

¡demuéstrelo!

Sea e_i el vector de $\Re^n$ que tiene todas sus componentes iguales a cero, excepto la i-ésima que es uno. Entonces el conjunto de vectores $\{e_1, \ldots, e_n\}$, además de generar a $\Re^n$, es un conjunto l. i.



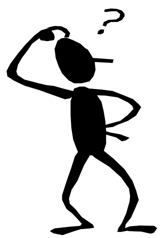
El conjunto $\{1, x, x^2\}$ de generadores de $P_2[x]$ es un conjunto l. i.

Los vectores $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

generan al espacio $M_2(\Re)$ y son l. i.

Ejercicio: Demuestre las afirmaciones hechas antes.

Ejercicio: Determine si los siguientes conjuntos son l. i.



$$S_1 = \{(1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0)\} \subset \Re^3$$

$$S_2 = \{(1,\ 1, -2),\ (-1,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 3,\ 2)\} \subset \Re^3$$

$$S_3 = \{1 + 2x - 2x^2,\ \ 3x + x^2,\ \ 1 - 2x^2\} \subset P_2[x]$$

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\Re)$$

Ejercicio: Sean V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, u y v vectores de V.

a) ¿Bajo que condiciones $\{ v \}$ es l. i.?

b) ¿Bajo que condiciones $\{ u,\ v \}$ es l.d.?

Ejercicio: Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Demuestre que:

a) $0 \in S \Rightarrow S$ l.d

b) $(S \subset T \wedge T$ l.i.$) \Rightarrow S$ l.i.

c) $(S \subset T \wedge S$ l.d.$) \Rightarrow T$ l.d.

Ejercicio: Suponga que $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial V.

Demuestre que $\{v_1 + v_2 - 2v_3, 2v_2 + v_3, v_1 - 2v_3 \}$ es también un conjunto linealmente independiente de V.

Base - dimensión

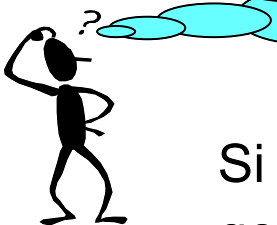
Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K.
Una **base** de V es un conjunto B de vectores de V que es linealmente independiente y generador de V.

Por ejemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto B = { $e_1, \ldots, e_n$ } de vectores de $\Re^n$, es una base de $\Re^n$; se llama **base canónica (o usual)** de $\Re^n$.

Los conjuntos $B = \{1, x, x^2\}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

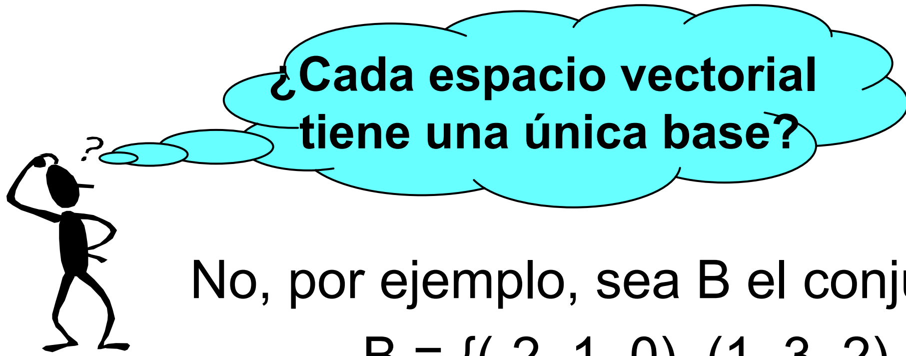
son las **bases canónicas** de $P_2[x]$ y $M_2(\Re)$ respectivamente.



¿Todo espacio vectorial tiene una base?

Si un espacio vectorial posee un conjunto finito de generadores S, S $\neq \{0\}$, entonces S contiene a una base de V.

Para demostrar este hecho consideremos $S = \{v_1, . . . , v_m\}$.
(*) Si S es l.i., entonces S es base de V. Si S no es l.i., alguno de los vectores de S, llamemos v_i depende linealmente de los demás y el conjunto $S^{(1)} = S - \{v_i\}$ sigue generando a V. Y volvemos a (*) pero ahora con $S^{(1)}$.
Repitiendo este proceso llegamos a obtener una base de V que, al menos, tendrá un solo vector no nulo.



No, por ejemplo, sea B el conjunto de vectores de $\Re^3$

$$B = \{(-2,\ 1,\ 0),\ (1,\ 3,\ 2),\ (1,\ 1,\ 1)\}$$

i) Demostremos que B es linealmente independiente.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tales que

$$\alpha(-2, 1, 0) + \beta(1, 3, 2) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ \hline \end{array}$$

Sistema que tiene solución única $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$

Luego B es l. i.

ii) Demostremos que B genera a $\Re^3$.

Sea $(a, b, c) \in \Re^3$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tales que

$$\alpha(-2, 1, 0) + \beta(1, 3, 2) + \gamma(1, 1, 1) = (a, b, c)$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} -2\alpha + \beta + \gamma = a \\ \alpha + 3\beta + \gamma = b \\ 2\beta + \gamma = c \end{array}\right|$$

Sistema que tiene solución única

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = -a - b + 2c \\ \beta = a + 2b - 3c \\ \gamma = -2a - 4b + 7c \end{array}\right|$$

En consecuencia,

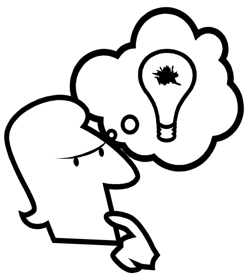
(-a-b+2c)(-2, 1, 0) + (a+2b-3c)(1, 3, 2) + (-2a-4b+7c)(1, 1, 1) = (a, b, c)

Luego B genera a $\Re^3$ y B es una base de $\Re^3$.

Ejercicio: Determine si los conjuntos S_1, S_2 son base del espacio $P_2[x]$.

$$S_1 = \{ 2 + 3x + x^2,\ 3 + x,\ -1 + 2x + x^2 \}$$

$$S_2 = \{1 + x^2,\ -1 + x,\ 2 + 2x \}$$



Ejercicio: Suponga que $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ es una base de un espacio vectorial V. Demuestre que $\{v_1 + 2v_2 - v_3,\ v_2 + 3v_3,\ v_1 + 4v_2 + 6v_3 \}$ también es una base de V.

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ puede tener múltiples bases, pero se puede demostrar que todas ellas, cuando son finitas, tienen el mismo número de elementos (la misma cardinalidad). Este hecho nos permite entregar el siguiente concepto:

Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ que tiene una base B con n vectores, entonces se dice que V es un espacio de dimensión finita y el número entero n se llama **dimensión** de V.

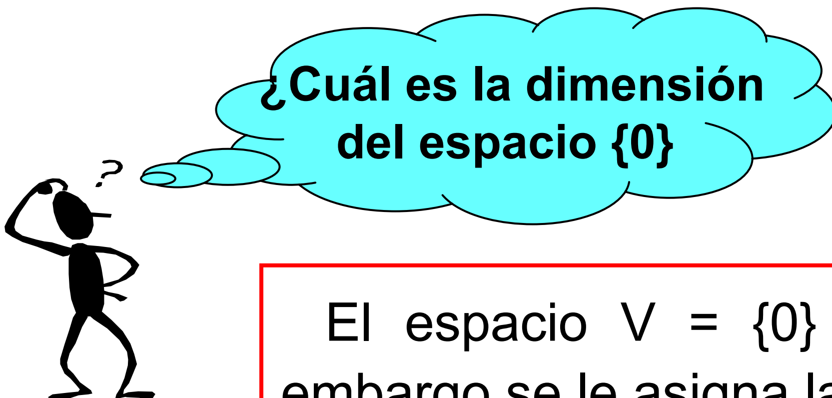
Si V tiene dimensión n, anotaremos $\mathbf{dim_K V = n}$ o $\mathbf{dim\ V = n}$, si no hay lugar a confusión.

En consecuencia,

$$\dim \Re = 1, \qquad \dim \Re^{n} = n$$

$$\dim P_2[x] = 3, \qquad \dim P_n[x] = n + 1$$

$$\dim M_2(\Re) = 4, \qquad \dim M_{mn}(\Re) = mn$$



El espacio V = {0} no posee base, sin embargo se le asigna la dimensión cero:

dim {0} = 0

Ejemplo: Determinemos la dimensión del subespacio de $P_2[x]$, $W = \{ a + bx + cx^2 \ / \ 2a - b + 4c = 0\}$

Se tiene que $W = \{a + bx + cx^2 \ / \ b = 2a + 4c \}$

$$= \{ a + (2a + 4c)x + cx^2 \ / \ a, \ c \in \Re \}$$

$$= \{ a(1 + 2x) + c(4x + x^2) \ / \ a, c \in \Re \}$$

$$= < \{ 1 + 2x, \ 4x + x^2 \} >$$

Siendo $B = \{ 1 + 2x, \ 4x + x^2 \}$ un conjunto generador de W y linealmente independiente, puesto que B tiene dos vectores y uno no es "múltiplo escalar" del otro, B es una base de W; luego dim W = 2.

Observaciones:

1) La dimensión del espacio vectorial real *C* de los números complejos es 2. Pero si consideramos a *C* como espacio vectorial sobre si mismo, entonces *C* es un espacio de dimensión 1.

   Justifique esta afirmación.

2) Existen espacios vectoriales que no poseen una base finita. Dichos espacios se dicen de dimensión infinita; por ejemplo, el espacio vectorial real C([a, b]; $\Re$), de todas las funciones reales continuas en [a, b] tiene dimensión infinita.

   Muestre otro ejemplo de un espacio vectorial de dimensión infinita.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n. La demostración de los siguientes teoremas queda de ejercicio.

1. Si $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$, con $m > n$, entonces S es l.d.
2. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es l. i., entonces B es base de V.
3. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es generador de V, entonces B es base de V.
4. Si W es un subespacio de V, entonces $\dim W \leq n$
5. Si W es un subespacio de V tal que $\dim W = n$, entonces $V = W$.

En un espacio vectorial V de dimensión finita, un conjunto linealmente independiente de vectores de V puede completarse hasta formar una base de V.

Teorema (Completación de base)

Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n.
Si $\{v_1, \ldots\ldots, v_k\} \subset V$, con $k < n$, es un conjunto linealmente independiente, entonces existen vectores $v_{k+1}, \ldots\ldots, v_n \in V$ tales que $\{v_1, \ldots\ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es base de V.

Ejercicio: Demuestre el teorema precedente.

Ejercicio: **Considere el subespacio de $M_2(\mathbb{R})$,**

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;/\; a - 2b + c - 4d = 0 \;\wedge\; a + b - 3d = 0 \right\}$$

a) Determine una base S para W.

b) Encuentre una base B de $M_2(\mathbb{R})$ que contenga a la base S de W.

Ejercicio: **Determine todos los valores del número k de modo que el conjunto**

$$B = \{ (1, 1, -1), (3, k, k), (4, k, 0) \}$$

sea una base de $\mathbb{R}^3$.

El siguiente teorema nos proporciona otra caracterización para las bases de un espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema: Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ conjunto de vectores de V.

B es base de V $\Leftrightarrow$ todo vector v de V se escribe de una única manera como combinación lineal de los vectores de B.

Ejercicio: Demuestre el teorema precedente.

El teorema precedente asegura que para cada $v \in V$ existen únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Estos escalares reciben el nombre de **coordenadas del vector v** con respecto a la base (ordenada) B y se denotan

$$[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Observe que $[v]_B$ es un vector de K^n. Por esta razón, muchas veces es llamado vector coordenado.

Ejemplo: Las coordenadas del vector v = (6, -5) $\in \Re^2$ con respecto a la base canónica E = {(1, 0), (0, 1)} de $\Re^2$ son

$$[v]_E = (6,\ -5)$$

¿Cuáles son las coordenadas de v = (6, -5) con respecto a la base ordenada B = {(5, - 3), (2, -1)} ?

Debemos resolver para $\alpha,\ \beta \in \Re$ la ecuación

$$\alpha(5,\ -3) + \beta(2,\ -1) = (6,\ -5)$$

es decir,

$$\left. \begin{array}{l} 5\alpha + 2\beta = 6 \\ -3\alpha - \beta = -5 \end{array} \right|$$

De aquí, $[v]_B = (4,\ -7)$

Ejemplo: Sea $v \in \Re^3$ tal que $[v]_B = (1, -1, 2)$, donde B es la base ordenada B = {(1, -1, 3), (1, 0, -2), (3, 1, -1)}. ¿Cuál es el vector v? Determinemos $[\ v\ ]_C$, donde C es la base C = {(1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 4)}.

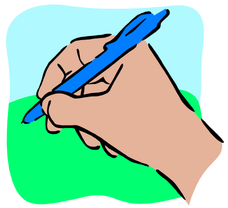
El vector es v = 1(1, -1, 3) - 1(1, 0, -2) + 2(3, 1, -1) = (6, 1, 3)

Determinemos $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tales que

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 2) + \gamma(1, 1, 4) = (6, 1, 3)$$

Esto requiere resolver el sistema compatible

$$\begin{array}{c|}\alpha + \beta + \gamma = 6 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 3 \\ \hline\end{array}$$



Obtenemos $[\ v\ ]_C = (5, 3, -2)$

Ejemplo: Consideremos la base ordenada de $P_2[x]$

$$B = \{1 + x^2,\ 1 + x,\ 2 + 3x^2\}$$

Determinemos las coordenadas del vector $p(x) = 4 + 5x - 3x^2$ con respecto a la base B, esto es, encontremos $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tales que

$$\alpha(1 + x^2) + \beta(1 + x) + \gamma(2 + 3x^2) = 4 + 5x - 3x^2$$

Reordenando e igualando polinomios obtenemos el sistema:

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \alpha + \beta + 2\gamma = 4 \\ \beta = 5 \\ \alpha + 3\gamma = -3 \end{array}$$

cuya solución nos conduce a

$$[p(x)]_B = (3,\ 5,\ -2)$$

Sea V espacio vectorial sobre K y B una base ordenada de V. Entonces,

(1) $[v + u]_B = [v]_B + [u]_B \,, \ \forall \ v, u \in V$

(2) $[\alpha \ v]_B = \alpha \, [v]_B \,, \ \forall \ v \in V, \ \forall \alpha \in \kappa$

Ejercicio: Sea B = { v_1, v_2, v_3 } una base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine los vectores de B si se sabe que (-1, 1, 1), (1, -1, 2) y (3, -1, 1) son las respectivas coordenadas, según la base B, de los vectores e_1, e_2, e_3 de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Suma y Suma directa

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean U, W dos subespacios de V.

Ya mencionamos que la unión de U y W no es, necesariamente, un subespacio de V. Definiremos U + W, la suma de U y W; esta resultará ser un subespacio de V que contendrá a ambos subespacios.

La suma de U y W es:

$$U+W=\{v\in V \ / \ v=u+w,\ u\in U,\ w\in W\}$$

Se tiene que:

i) $0_V = 0 + 0$, con $0 \in U$ y $0 \in W$

ii) Si $v_1 = u_1 + w_1$ y $v_2 = u_2 + w_2$ son vectores de U + W, entonces $v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

iii) Si $\alpha \in \kappa$, entonces $\alpha v_1 = \alpha u_1 + \alpha w_1 \in U + W$

Por lo tanto U + W es un subespacio de V. Además se puede establecer que:

(1) $U \subseteq U + W$ y $W \subseteq U + W$

(2) Si $U = \langle S \rangle$ y $W = \langle T \rangle$, entonces $U + W = \langle S \cup T \rangle$

(3) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Puede suceder que dim(U + W) = dim V, es decir, V = U + W. Por ejemplo, $\Re^2 = U + W$ donde $U = \langle \{(1, 0), (0, 1)\} \rangle$ y $W = \langle \{(3, 1)\} \rangle$

En efecto, es claro que $U + W \subseteq \Re^2$
Por otra parte, si $(x, y) \in \Re^2$, entonces

$$(x, y) = (0, y - \tfrac{x}{3}) + (x, \tfrac{x}{3}) \in U + W$$

Si V = U + W, los vectores de V no necesariamente se escriben de manera única como una suma de un vector de U y un vector de W. En el ejemplo anterior,

$$(3, 3) = 2(0, 1) + (3, 1)$$
$$(3, 3) = -6(1, 0) + 3(3, 1)$$

Observe que:

$$\boxed{V = U + W \Leftrightarrow \forall v \in V,\ \exists u \in U,\ \exists w \in W :\ v = u + w}$$

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean U, W dos subespacios de V. Se dice que V es la suma directa de U y W, en cuyo caso se anota $V = U \oplus W$ si

$$\forall v \in V,\ \exists! u \in U,\ \exists! w \in W :\ v = u + w$$

Ejercicio: Sean U = < {(0, 1)} > y W = < {(3, 1)} > subespacios de $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $\mathbb{R}^2$ es suma directa de U y W.

Una caracterización útil de la suma directa la entrega el siguiente teorema:

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean U, W dos subespacios de V.

$$V = U \oplus W \iff (V = U + W \quad \wedge \quad U \cap W = \{0\})$$

Ejercicio: Demuestre el teorema precedente.

Consecuencia del teorema anterior es la siguiente:

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $V = U \oplus W$, entonces dim V = dim U + dim W.

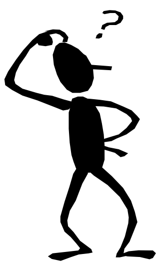
Ejercicio: **Considere los subespacios de $\mathbb{R}^3$**

$$U_1 = \{ (x, y, z) \ : \ x + y + z = 0 \}$$

$$U_2 = < \{ (1, 1, 1) \} >$$

Demuestre que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de U_1 y U_2.

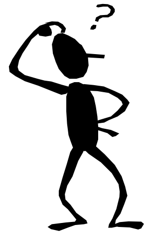
Ejercicio: **Sean S_1 y S_2 los subespacios de $M_2(R)$**



$$S_1 = \{ A \in M_2(\Re) \ / \ A \ \text{ diagonal } \}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re) \ / \ d = 0 \right\}$$

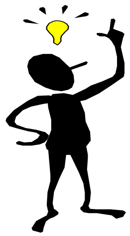
¿Es $M_2(R)$ suma directa de S_1 y S_2?



Dado un subespacio U de V, ¿existe un "suplementario" de U? Es decir, existe un subespacio W de V tal que $V = U \oplus W$.

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita n y sea U subespacio de V. Entonces existe W subespacio de V tal que $V = U \oplus W$.

En efecto, si U = V, basta tomar W = {0}. Supongamos que dim U = k < n y sea $\{ v_1, \ldots, v_k\}$ una base de U. Por el teorema completación de base, existen $v_{k+1}, \ldots,$ v_n vectores de V tales que $\{ v_1, \ldots, v_n \}$ es base de V. Sea $W = \{ v_{k+1}, \ldots, v_n\}$; entonces $V = U \oplus W$.



El suplementario de un subespacio U no es único. En $\Re^2$ cualquier par de rectas no colineales que pasen por el origen, están asociadas a subespacios suplementarios.

Ejercicio: Considere el subespacio de $\Re^4$,

U = {(x, y, z, t) : x - 2y + z – 4 t = 0 y x + y + 2z = 0}

Determine W subespacio de $\Re^4$ tal que $\Re^4 = U \oplus W$.

Espacios con producto interior

En esta unidad, todos los espacios vectoriales serán reales

Sea V un espacio vectorial sobre $\Re$. Un producto interior (p.i.) en V es una función $< , > : V \times V \longrightarrow \Re$

$$(u, v) \longmapsto < u, v >$$

que satisface lo siguiente:

i) $< u_1 + u_2, \; v > = < u_1, v > + < u_2, v >; \quad \forall u_1, u_2, v \in V$

ii) $< \alpha u, v > = \alpha < u, v >; \quad \forall \alpha \in \Re; \quad \forall u, v \in V$

iii) $< u, v > = < v, u >; \quad \forall u, v \in V$

iv) $v \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; < v, v >$ es positivo

$< u, v >$ se lee producto interior (o producto escalar) entre los vectores u y v.

Un espacio con producto interior es un espacio vectorial V con un p.i. definido en él.

Observaciones:

(1) Cuando el espacio V es complejo, las condiciones exigidas para que una función sea p.i. son diferentes. A saber, $< u,\ v > = < v,\ u >;\ \forall\ u, v \in V$.

(2) Si $(V, <, >)$ es un espacio con p.i., entonces

i) $< u,\ v_1 + v_2 > = \ < u, v_1 > + < u, v_2 >; \quad \forall u, v_1, v_2 \in V$

ii) $< u, \alpha v > = \alpha < u, v >; \quad \forall \alpha \in \Re; \quad \forall u, v \in V$

Más aún,

$$< u, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n > = \alpha_1 < u, v_1 > + \ldots + \alpha_n < u, v_n >;$$
$$\forall u, v_1, \ldots, v_n \in V, \ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Re$$

(3) Si (V, < , >) es un espacio con p.i., entonces

$$< v, \ v > = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$$

(4) En un espacio vectorial V pueden estar definidos varios p.i. Por ejemplo, las siguientes funciones constituyen p.i. en $\Re^2$

f((x, y), (a, b)) = xa + yb

g((x, y), (a, b)) = xa – ya – xb + 4yb

Ejemplos de espacios con p.i.

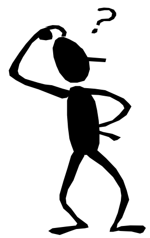
Para n número natural, los espacios $\Re^n$, $M_n(\Re)$ y $P_n[x]$ son espacios con p.i., si se considera:

$$< (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$< A, B > = tr(B^t A)$$

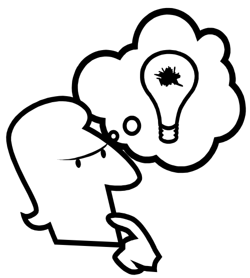
$$< p(x), q(x) > = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

respectivamente.



Ejercicio: Demuestre que efectivamente las funciones < , > definidas antes son p.i. en los respectivos espacios.

En lo que sigue, siempre que no se diga algo en contrario, los espacios $\Re^n$, $M_n(\Re)$ y $P_n[x]$ se considerarán con los productos interiores definidos antes que son llamados **p.i. canónicos o usuales**.



Ejercicio: Calcule

a) $< (3, -5, 1, -2) \, , \, (7, 4, -2, 3) >$

b) $< \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} >$

c) $< x^2 + 5 \, , \, 2x + 1 >$

Definiciones: Sea V un espacio con p.i. < , >.

1) La norma o longitud del vector v de V es el número real

$$\| v \| = \sqrt{< v, v >}$$

2) La distancia entre los vectores u y v de V es

$$d(u, v) = \| u - v \|$$

3) El vector v de V se dice **unitario** si $\| v \| = 1$.

Si el vector v de V, $v \neq 0$, no es unitario, entonces $\dfrac{v}{\| v \|}$ lo es. Por ejemplo, el vector $v = (3, 0, 4)$ no es unitario puesto que $\| v \| = 5$, pero $\dfrac{v}{\| v \|} = \left(\dfrac{3}{5}, 0, \dfrac{4}{5}\right)$ lo es.

Ejercicio: **Calcule la norma de u y la distancia entre u – 2v y 3u + v si u = (-3, 0, 4, 0) y v = (1, -5, 2, 6) son vectores de $\Re^4$.**

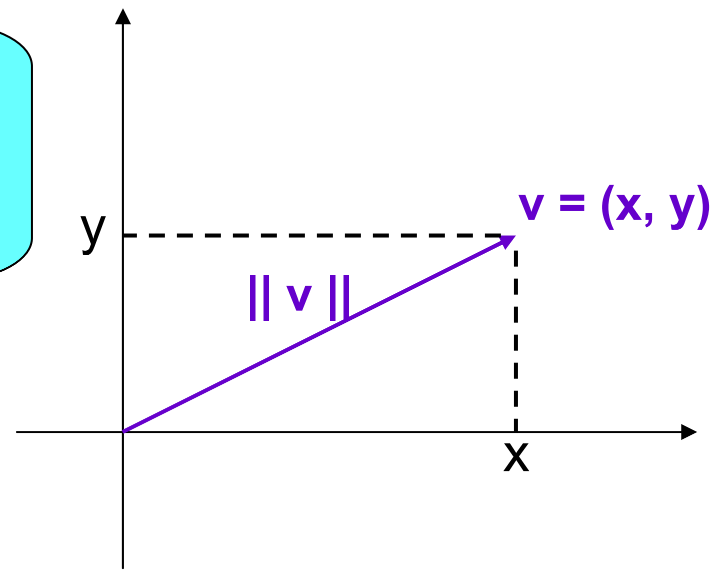
Ejercicio: **Si** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$, **calcule la longitud de A y de A – B.**

Ejercicio: **Muestre ejemplos de vectores unitarios u_1, u_2, u_3 de los espacios** $\Re^3$, $M_2(\Re)$ y $P_1[x]$ **que no sean los de la base canónica de esos espacios.**

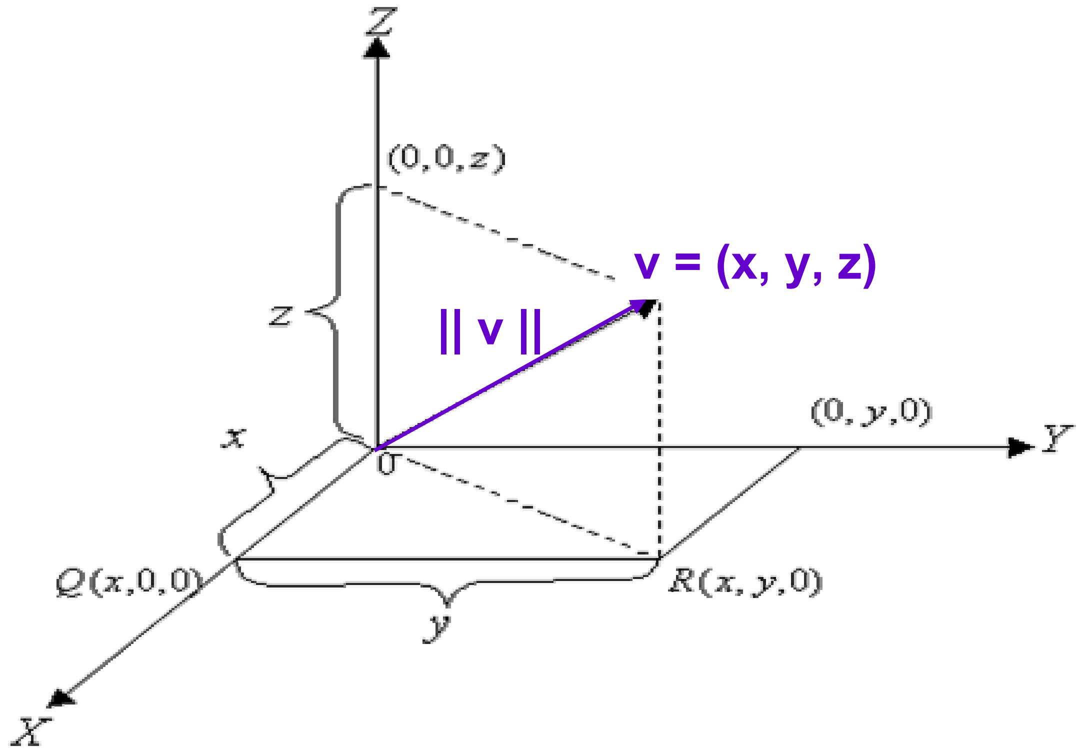
Observaciones:

- Si $x \in \Re, \quad \| x \| = \sqrt{< x, \; x >} = \sqrt{x^2} = | x |$

- Si $v = (x, y) \in \Re^2, \quad \| v \| = \sqrt{< v, \; v >} = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$\text{Si}\ \ v = (x, y, z) \in \Re^3,\ \ \|v\| = \sqrt{<v,\ v>} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



• Si $(V, < , >)$ es un espacio con p.i., se puede demostrar que:

i) $\| v \| \geq 0 ; \quad \forall\ v \in V$

ii) $\| v \| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$

iii) $\| \alpha\ v \| = \alpha \| v \|; \quad \forall \alpha \in \Re, \ \forall v \in V$

iv) $\| v + u \| \leq \| v \| + \| u \| ; \quad \forall\ v, u \in V$

(Desigualdad triangular)

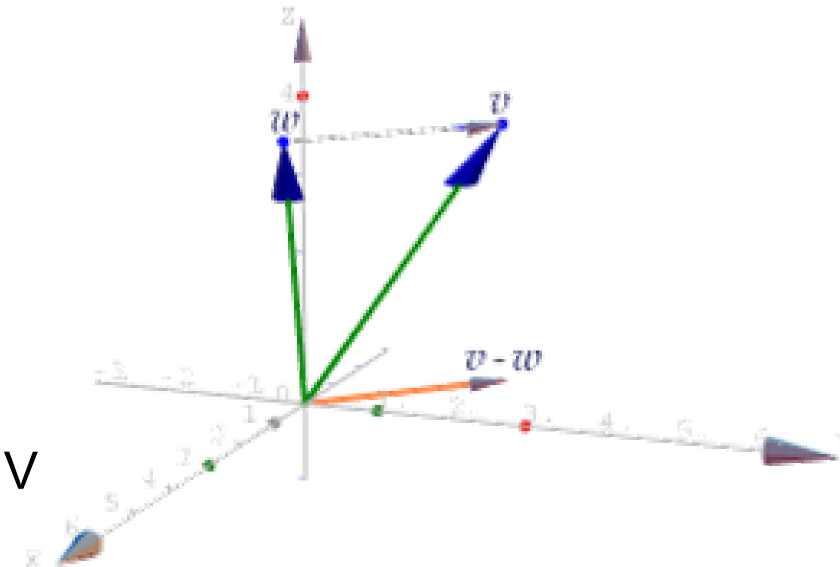
No es difícil demostrar i), ii) y iii) anteriores. La demostración de iv) es consecuencia de otro teorema conocido como la **Desigualdad de Cauchy-Schwartz:**

$$| < v, u > | \leq \| v \| \ \| u \| ; \quad \forall\ v, u \in V$$

dándose la igualdad si y sólo si v y u son linealmente dependientes.

- Si $(V, < \, , \, >)$ es un espacio con p.i., las propiedades enunciadas para la norma $\| \quad \|$ permiten demostrar lo siguiente para la distancia entre vectores:

$$\boxed{\mathbf{d(v, w) = \| v - w \|}}$$



i) $d(v,u) \geq 0 \, ; \quad \forall \, v, \; u \in V$

ii) $d(v,u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = u$

iii) $d(v,u) = d(u, \; v); \quad \forall v, \; u \in V$

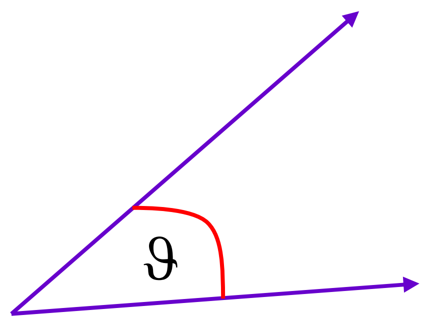
iv) $d(v, \; u) \leq d(v, \; w) + d(w, \; u) \, ; \quad \forall \, v, u, w \in V$

(Desigualdad triangular)

La Desigualdad de Cauchy-Schwartz le da sentido a la siguiente definición:

Definición: Sea V un espacio con p.i. < , >. El ángulo ϑ entre los vectores u y v de V es tal que

$$\cos\vartheta = \frac{<u,v>}{\|u\|\,\|v\|}$$



$$\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{<u,v>}{\|u\|\,\|v\|}\right)$$

Ejemplo: Calculemos el valor del número real k para que el ángulo formado por los vectores $u = (1, k, 1)$ y $v = (1, 1, 0)$ sea $\pi/3$ radianes.

$$\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{1+k}{\sqrt{k^2+2}\,\sqrt{2}}\right) = \pi/3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+k}{\sqrt{2k^2+4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad k = 0$$

Ejercicio: Calcule el ángulo entre los vectores

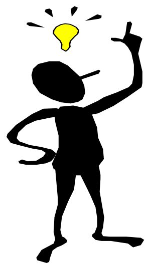
a) $u_1 = (1, -4, 2)$ y $u_2 = (-5, 1, -1)$

b) $v_1 = (1, -1, 1, -1)$ y $v_2 = (2, 0, 3, 5)$

Definición: Sea V un espacio con p.i. $< , >$. Se dice que:

1) Los vectores u, v de V son **ortogonales** o **perpendiculares** si $< u, v > = 0$.
2) El conjunto S de vectores de V es un **conjunto ortogonal** si todos sus elementos son ortogonales entre sí.
3) El conjunto S es **ortonormal** si es ortogonal y todos sus elementos son unitarios.

$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad < u, v > = 0$$



Por ejemplo, en $\Re^2$ los vectores u = (a, b) y v = (-b, a) son ortogonales puesto que $\langle u, v \rangle = 0$.

Sea B = $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\Re^n$. Los vectores de B tienen la siguiente característica:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En consecuencia, B es un conjunto ortogonal. Más aún, B es un conjunto ortonormal puesto que

$$\| e_i \| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = \sqrt{1} = 1, \quad \forall i$$

Observaciones: **Sea V espacio con p.i. < , >**

1. El vector 0 es ortogonal a todos los vectores de V. En efecto, si v es cualquier vector de V, podemos escribir

$$< v, 0 > = < v, 0 + 0 >$$

$$\Rightarrow \; < v, 0 > = < v, 0 > + < v, 0 >$$

$$\Rightarrow \; < v, 0 > = 0$$

2. Si S es un conjunto ortogonal de vectores de V,

$$S^{o} = \left\{ \frac{v}{\|v\|} \; / \; v \in S \right\}$$ es un conjunto ortonormal

pues $< \dfrac{v}{\|v\|}, \dfrac{u}{\|u\|} > = \dfrac{1}{\|v\|}\dfrac{1}{\|u\|} < v, u > = 0$

Ejemplo: Determinemos todos los valores reales de k de modo que los vectores $u = (k^2, 2, k)$ y $w = (k, 3, -7)$ sean ortogonales.

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k^3 + 6 - 7k = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (k-1)(k-2)(k+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 1 \quad o \quad k = 2 \quad o \quad k = -3 \end{aligned}$$

Ejercicio: Para qué valores del número real k los siguientes vectores son ortogonales (p.i. usuales):

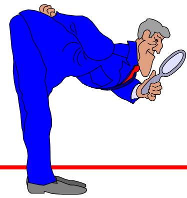
a) $u_1 = (k, 1, 2, k)$ y $u_2 = (4, 3k, k + 10, k)$

b) $p(x) = x$ y $q(x) = x - k$

c) $A = \begin{pmatrix} k^2 & -4 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ k & 2 \end{pmatrix}$

Teorema de Pitágoras:

Sea V un espacio con p.i. $\langle\ ,\ \rangle$ y sean u, v vectores de V tales que $u \perp v$. Entonces



$$\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$$

Ejercicio: Sea V espacio con p.i. $\langle\ ,\ \rangle$. Demuestre que para todo u, v vectores de V se tiene que:

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2\,(\| u \|^2 + \| v \|^2)$$

(Ley del Paralelógramo)

Complemento ortogonal

Resolvamos el siguiente problema:

Sea S = { (1, -2, 3), (-2, 5, -1) } $\subset \Re^3$. Encontrar dos vectores unitarios y ortogonales a los vectores de S.

a) Queremos (x, y, z) tales que <(x, y, z), (1, -2, 3)> = 0 y <(x, y, z), (-2, 5, -1)> = 0. Por lo tanto debemos resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 0 \\ -2x + 5y - z & = & 0 \end{array}\right|$$

Obtenemos infinitas soluciones para este sistema:

$$(-13\,,\ -5,\ 1)\lambda\ ;\ \ \lambda \in \Re$$

b) Escojamos dos de estas soluciones: $v_1 = (-13, -5, 1)$ y $v_2 = (13, 5, -1)$; entonces v_1 y v_2 son ortogonales a los vectores de S.

c) Pero v_1 y v_2 no son unitarios puesto que

$$\| v_1 \| = \sqrt{195} = \| v_2 \|.$$

d) Entonces los vectores

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{195}} v_1 \quad y \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{195}} v_2$$

satisfacen lo pedido.

Definición: Sea V un espacio con p.i. $< , >$ y $S \subseteq V$.

El **complemento ortogonal de S** es el conjunto,

$$S^{\perp} = \{ v \in V \ / \ v \perp x , \ \forall x \in S \}$$
$$= \{ v \in V \ / \ < v, x > = 0 , \ \forall x \in S \}$$

Ejemplo: Si S = {(1, -2, 3), (-2, 5, -1)} $\subset \Re^3$ (problema precedente), entonces el complemento ortogonal de S es

$$S^{\perp} = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / < (x, y, z), (1, -2, 3) > = 0 \ \wedge$$
$$< (x, y, z), (-2, 5, -1) > = 0 \}$$
$$= \{(x, y, z) \in \Re^3 \ / \ x - 2y + 3z = 0 \ \wedge \ -2x + 5y - z = 0 \}$$
$$= < \{ (-13, -5, 1) \} >$$

Si V es un espacio con p.i. con elemento cero 0_V, entonces $\{0_V\}^{\perp} = V$ y $V^{\perp} = \{0_V\}$.

Teorema: Sea V un espacio con p.i. $<,>$ y $S \subseteq V$, $S \neq \Phi$. Entonces $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.

Efectivamente, como 0 es ortogonal a todos los vectores de V, en particular 0 es ortogonal a todos los vectores de S; luego $0 \in S^{\perp}$. Además

$$u, v \in S^{\perp} \Rightarrow \, <u, x> = 0 \; \wedge <v, x> = 0, \; \forall x \in S$$

$$\Rightarrow \, <u+v, x> = <u, x> + <v, x> = 0, \; \forall x \in S$$

$$\Rightarrow u + v \in S^{\perp}$$

Finalmente,

$$\alpha \in \Re \;\; \text{y} \;\; u \in S^{\perp} \Rightarrow \alpha \in \Re \;\; \text{y} \;\; <u, x>=0 \;,\; \forall x \in S$$

$$\Rightarrow <\alpha u, x> = \alpha <u, x> = \alpha \cdot 0 = 0, \;\forall x \in S$$

$$\Rightarrow \alpha u \in S^{\perp}$$

Ejercicio: **Considere el espacio $M_2(R)$ con p.i. usual. Determine el complemento ortogonal del conjunto**

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Cuál es el complemento ortogonal de T si se considera el p.i. $<A, B> = tr(A^t B)$?

Observaciones:

1. **Sea V espacio con p.i. $<\ ,\ >$ y W un subespacio de V tal que $W = <\{w_1, \ldots, w_k\}>$. Entonces,**

$$\mathbf{W^{\perp} = \{ w_1, \ldots, w_k \}^{\perp}}$$

Efectivamente, $v \in W^{\perp} \Rightarrow v \perp w,\ \forall w \in W$

$$\Rightarrow v \perp w_i\ , \forall i = 1, \ldots, k$$

$$\Rightarrow v \in \{w_1, \ldots, w_k\}^{\perp}$$

Por otra parte, sea $v \in \{w_1, \ldots, w_k\}^{\perp}$ y $w \in W$, entonces

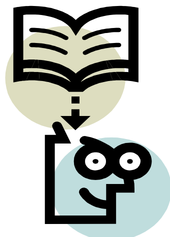
$$w = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_k w_k, \text{ con } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Re \quad \text{y}$$

$$< v, w > = \alpha_1 < v, w_1 > + \ldots + \alpha_k < v, w_k > = 0$$

es decir, $v \in W^{\perp}$

2. Sea V espacio con p.i. < , > de dimensión finita y W un subespacio de V. Entonces,

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V \qquad y \qquad V = W \oplus W^{\perp}$$



Ejercicio: Sea W el subespacio de $\Re^3$, W = < {(1, 2, 1), (-1, 0, 1), (-1, 4, 5)}>. Determine la dimensión del complemento ortogonal de W.

Ejercicio: Encuentre una base para el complemento ortogonal del subespacio de $\Re^4$,

$$U = \{(x, y, z, u) \,/\, x + y + 3z - u = 0 \;\; y \;\; x - z + 2u = 0\}$$

Bases ortogonales - ortonormales

Teorema: Sea V un espacio con p.i. $< \, , \, >$. Todo conjunto S ortogonal de vectores no nulos de V es linealmente independiente.

En efecto, sea $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ortogonal y tal que $v_i \neq 0, \ \forall i$.
Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Re$ tales que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$; entonces

$$\forall i = 1, 2, \ldots, k, \ < v_i, \ \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k > = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 < v_i, v_1 > + \ldots + \alpha_k < v_i, v_k > = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i < v_i, v_i > = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i \| v_i \|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0$$ Luego S es l.i.

Consecuencia del Teorema anterior es:

Si S es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V, entonces

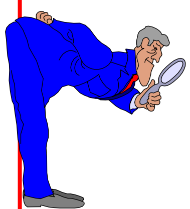
$$\mathbf{card(S) \leq dim(V)}$$

Sea V un espacio con p.i. $< \ , \ >$ de dimensión finita. Sabemos que V posee bases pero éstas no son necesariamente ortogonales (ortonormales).

La construcción de una base ortogonal (ortonormal) a partir de una base del espacio V es un resultado importante conocido como “Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt”.

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea B = $\{v_1, . . . , v_n\}$ base de V, espacio con producto interior < , >. Proceda a considerar los vectores:



$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{\| w_1 \|^2} \; w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_2 >}{\| w_2 \|^2} \; w_2 - \frac{< v_3, w_1 >}{\| w_1 \|^2} \; w_1$$

....

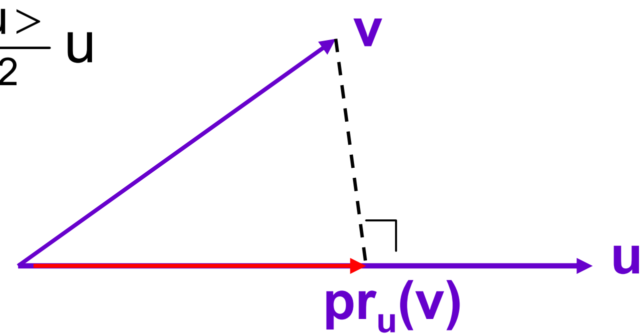
$$w_n = v_n - \frac{< v_n, w_{n-1} >}{\| w_{n-1} \|^2} \; w_{n-1} - \ldots\ldots - \frac{< v_n, w_1 >}{\| w_1 \|^2} \; w_1$$

Entonces $B_O = \{w_1, . . . , w_n\}$ es una base ortogonal de V.

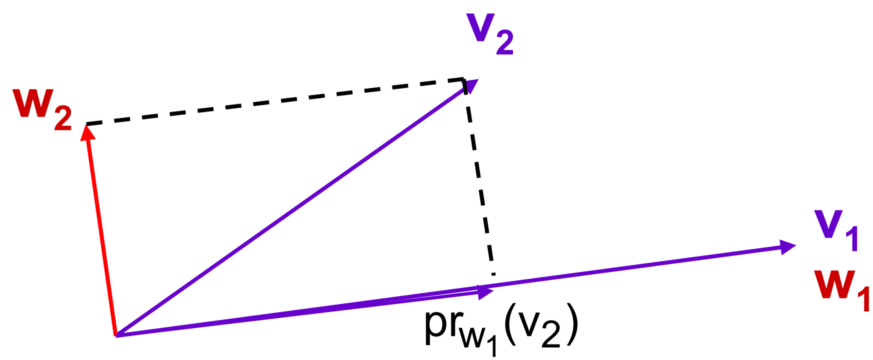
Además, $\overline{B_o} = \left\{ \frac{w_1}{||w_1||}, \ldots\ldots, \frac{w_n}{||w_n||} \right\}$ es una base ortonormal de V.

Para comprender el proceso, definamos la **"proyección del vector v en el vector u"** como

$$pr_u(v) = \frac{<v, u>}{||u||^2}\, u$$



Entonces los vectores w_1 y w_2 de la base B_O son:



$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{\| w_1 \|^2} w_1 = v_2 - pr_{w_1}(v_2)$$

Ejemplo: **Sea B la base de $\Re^3$, B = {(1, -1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 2)}. A partir de la base B construyamos una base ortonormal para $\Re^3$.**

$$w_1 = (1, -1, 1)$$

$$w_2 = (1, 0, 1) - \frac{<(1,0,1),\ (1,-1,1)>}{\|(1,-1,1)\|^2}\ (1,-1,1) = (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,-1,1)$$

$$= (\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$$

$$w_3 = (1,1,2) - \frac{<(1,1,2),\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})>}{\|(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\|^2}\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) - \frac{<(1,1,2),(1,-1,1)>}{\|(1,-1,1)\|^2}(1,-1,1)$$

$$= (1,1,2) - \frac{5}{2}(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}) - \frac{2}{3}(1,-1,1) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

Entonces, $B_o = \left\{(1, -1, 1),\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}),\ (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\right\}$ **es una base ortogonal de** $\Re^3$**.**

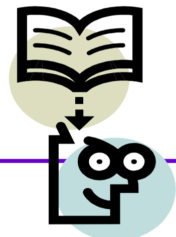
Como $\|w_1\| = \sqrt{3}, \quad \|w_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \|w_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **,**

$$\overline{B_o} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \right\}$$

es una base ortonormal de $\Re^3$ **.**

Ejercicio: Encuentre una base ortogonal para $\Re^3$ **a partir de la base B = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0 , 1)}.**

Ejercicio: **Aplique el Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a las siguientes bases de $\Re^3$:**



a) $B = \{(2, 1, 0),\ (-1, 1, 1),\ (1, 0, 3)\}$

b) $B = \{(1, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1)\}$

Ejercicio: **Encuentre una base ortogonal para los siguientes subespacios de $\Re^4$ y $M_2(R)$:**

$U = \{(x, y, z, u) \,/\, x + y = 0 \text{ y } z + u = 0\}$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re) \;/\; a = 0 \wedge c = 0 \right\}$$

Observación:

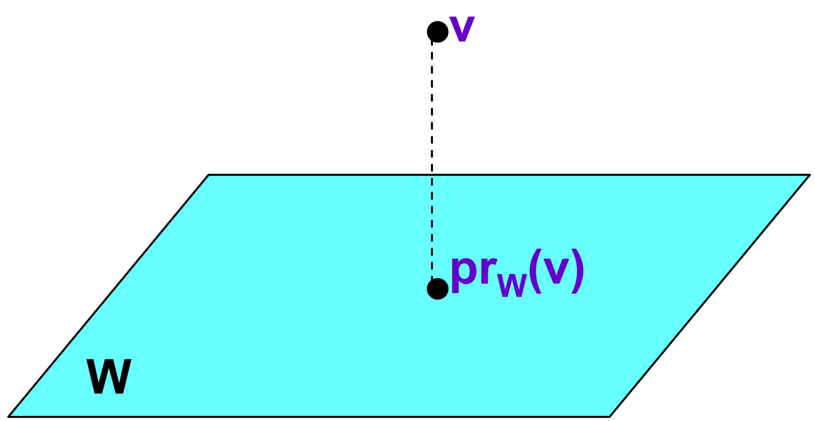
Si V es un espacio con p.i. $<\ ,\ >$ de dimensión finita y $B_o = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base ortogonal de V, las coordenadas del vector v de V con respecto a la base B_o son $\alpha_i = \dfrac{<v, w_i>}{\|w_i\|^2}$. En efecto, como $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$, para cada i = 1, . . . , n,

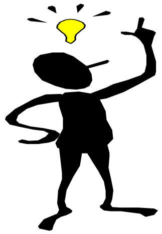
$$
\begin{aligned}
< v, w_i > &= < \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n,\ w_i > \\
&= \alpha_1 < w_1, w_i > + \ldots + \alpha_n < w_n, w_i > \\
&= \alpha_i < w_i, w_i > \\
&= \alpha_i \| w_i \|^2
\end{aligned}
$$

Proyección ortogonal

Sea V un espacio con p.i. < , > y W un subespacio de V con base ortogonal $\{w_1, \ldots\ldots\ldots, w_k\}$. La **proyección ortogonal** del vector v de V en el subespacio W es el vector

$$\boxed{\bar{v} = pr_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{<v, w_i>}{\|w_i\|^2} w_i}$$





La aplicación $p : V \longrightarrow W$; definida por $p(v) = \overline{v}$, se llama proyección ortogonal de V en W.

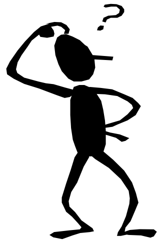
Ejemplo: En $\Re^3$ consideremos el subespacio W generado por S = {(1, -2, 3), (5, -1, 0)} y determinemos la proyección ortogonal del vector v = (4, -1, 6) en W.

i) S es una base de W pero S no es ortogonal.

ii) Aplicamos a S el Proceso de Gram-Schmidt y obtenemos S_0 = {(1, -2, 3), (3, 0, -1)} base ortogonal de W.

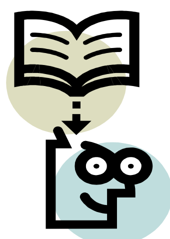
iii) La proyección ortogonal de v en W es:

$$\overline{v} = \frac{12}{7}(1, -2, 3) + \frac{3}{5}(3, 0, -1)$$



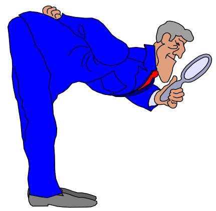
Ejercicio: Encuentre la proyección ortogonal del vector v = (1, 1, -1) de $\Re^3$ en el subespacio U = {(x, y,z) / x – y – 2z = 0}

Ejercicio: Sea W = <{(1,0,1,0), (1,0,3,0), (2,1,4,1)}>. Determine la proyección ortogonal de v = (1,1,1,-1) en W.



Ejercicio: Encuentre la proyección ortogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en el subespacio de $M_2(R)$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Transformaciones lineales



Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo κ de los números reales. Una transformación lineal o aplicación lineal de V en W es una función $T : V \longrightarrow W$ que satisface:

i) $T(u+v) = T(u) + T(v); \quad \forall u, v \in V$

ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v); \quad \forall \alpha \in \kappa; \quad \forall v \in V$

Si T es una transformación lineal de V en W, entonces

$$T(v_1 + \ldots\ldots + v_n) = T(v_1) + \ldots\ldots + T(v_n)$$

Más aún, $T(\alpha_1 v_1 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots\ldots + \alpha_n T(v_n)$,

$\forall v_1, \ldots., v_n \in V, \ \forall \alpha_1, \ldots., \alpha_n \in \kappa.$

Si T es una transformación lineal de V en W, entonces T(0) = 0. Esto se enuncia de manera equivalente así,

$$\boxed{T(0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad T \text{ no es aplicación lineal}}$$

Ejemplos de aplicaciones lineales

1) Consideremos $f : \Re \rightarrow \Re$ la función f(x) = 4x. Entonces,

$$f(x + a) = 4(x + a) = 4x + 4a = f(x) + f(a)$$

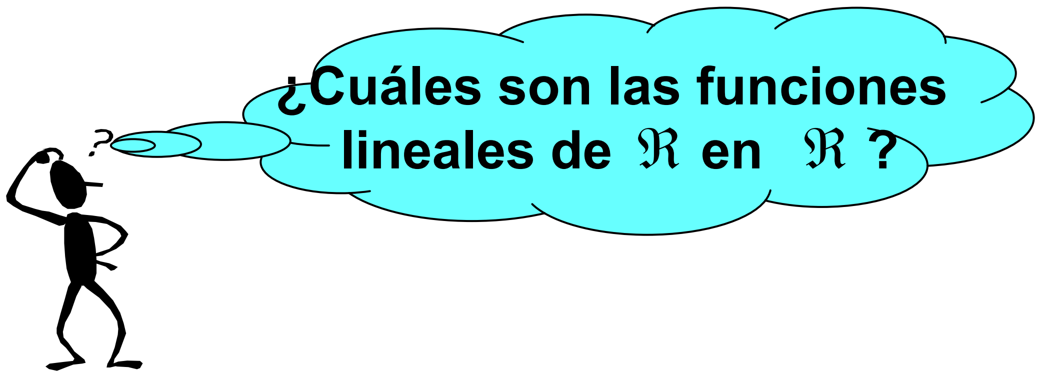
$$f(\alpha x) = 3(\alpha x) = \alpha(3x) = \alpha f(x)$$

Por lo tanto, f es una aplicación lineal. Pero si definimos g(x) = x + 4, g no es una aplicación lineal puesto que $g(0) \neq 0$. Observe que la función g tampoco cumple las condiciones i) y ii) exigidas para ser transformación lineal.

Las siguientes funciones de $\Re$ en $\Re$ no son lineales:

$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = e^x \qquad f(x) = \ln x \qquad f(x) = \cos x$$



2) Sea $T : \Re^3 \rightarrow \Re^2$ la función definida así,

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, \; y + 3z).$$

Entonces T es una aplicación lineal. ¡Demuéstrelo!

Ejercicio: Muestre un ejemplo de una aplicación de $\Re^3$ en $\Re^2$ que sea lineal y otro que no sea lineal.

3) Consideremos $F: M_{mxn}(\Re) \to M_{nxm}(\Re); \quad F(A) = A^t$

Entonces, $F(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = F(A) + F(B)$

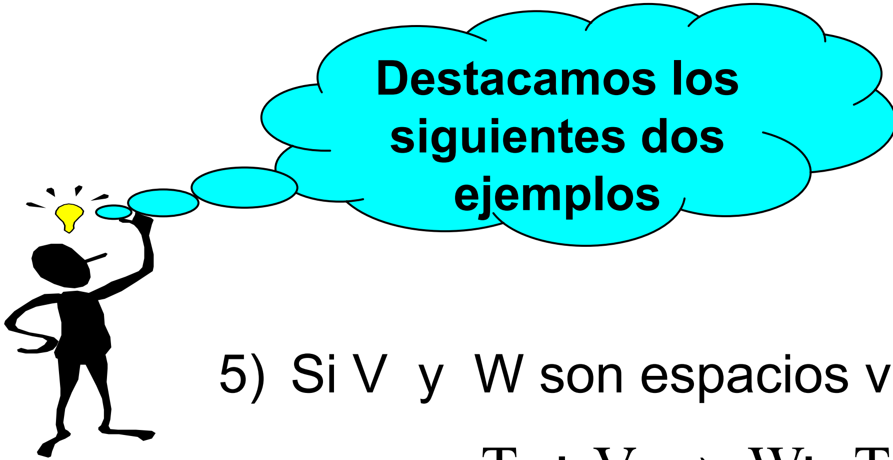
$$F(\alpha A) = (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha F(A)$$

Por lo tanto F es una transformación lineal.

4) La función $T: P_3[x] \to P_2[x]; \quad T(p) = p' = \frac{dp}{dx}$ es lineal; en efecto,

$$T(p + q) = (p + q)' = p' + q' = T(p) + T(q)$$

$$T(a\,p) = (a\,p)' = a\,p' = a\,T(p),\ a \in \Re$$



5) Si V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$,

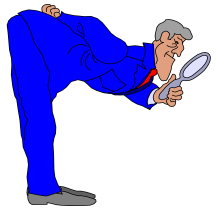
$$T_o : V \to W; \;\; T_o(v) = 0_W$$

es una aplicación lineal

6) Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, la función

$$I : V \to V; \;\; I(u) = u$$

es lineal; se llama **aplicación identidad de V.**



El siguiente teorema nos enseña a extender a todo el espacio dominio, una aplicación lineal que se conoce sólo en una base de dicho espacio.

Teorema: Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con base B = $\{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ y W un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $w_1, \ldots\ldots, w_n \in W$ entonces existe una única aplicación lineal T de V en W tal que $T(v_i) = w_i, \ \forall i = 1, \ldots\ldots, n$.

En efecto, si $v \in V$, existen únicos $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n$$

La aplicación T de V en W definida por:

$$T(v) = \alpha_1 w_1 + \ldots\ldots + \alpha_n w_n$$

satisface lo requerido en el teorema.

Ejemplo: ¿Cuál es la aplicación lineal T de $\Re^2$ en $\Re^2$ tal que T(1, 0) = (-3, 1) y T(0, 1) = (5, -4)?

Sea $(a, b) \in \Re^2$, entonces (a, b) = a (1, 0) + b (0, 1).

La aplicación T que satisface lo requerido es:

$$T : \Re^2 \longrightarrow \Re^2 \ ; \ T(a, b) = a(-3, 1) + b(5, -4),$$

o más precisamente, T(a, b) = (-3a + 5b, a - 4b).

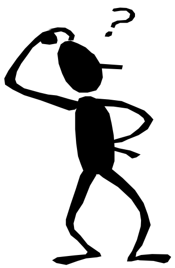
¿Cuál es la aplicación lineal T si se quiere que T(4,-3) =(-3, 1) y T(-3, 2) = (5, -4)? En este caso debemos escribir,

$$(a, b) = (-2a - 3b)\ \mathbf{(4, -3)} + (-3a - 4b)\ \mathbf{(-3, 2)}$$

Y la aplicación lineal es,

$T(a, b) = (-2a - 3b)(-3, 1) + (-3a - 4b)(5, -4)$,

es decir, $T(a, b) = (-9a - 11b, 10a + 13b)$.



Ejercicio: ¿Cuál es la aplicación lineal T de $\Re^3$ en $\Re^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, -3)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ y $T(0, 0, 1) = (6, 5)$?

Ejercicio: Determine la aplicación lineal T de $\Re^3$ en $P_2[x]$ tal que $T(1, 1, 1) = 2 + x$, $T(1, 1, 0) = x - x^2$ y $T(1, 0, 0) = 1 + 3x + 2x^2$.

Ejercicio: **Determine cuál (es) de las siguientes aplicaciones son lineales.**

1) $T:\Re \to \Re^3; \quad T(x) = (x, 0, 3x)$

2) $T:\Re^2 \to \Re^3; \quad T(a,b) = (5a - b, a + b, 1)$

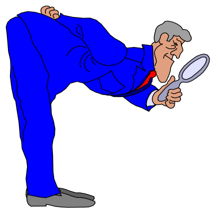
3) $T:\Re^2 \to P_2[x]; \quad T(a,b) = a + 5ax + (2a + 4b)x^2$

4) $T:P_1[x] \to \Re^3; \quad T(a + bx) = (a, 2b - a, a + b)$

5) $T:\Re^3 \to M_2(\Re); \quad T(a,b,c) = \begin{pmatrix} 2a - c & a \\ a - c & 3 \end{pmatrix}$

6) $T:M_n(\Re) \to \Re; \quad T(A) = \det(A)$

Núcleo e imagen



Sean V y W espacios vectoriales sobre K y $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. El **núcleo o kernel** de T es el conjunto

$$\text{Ker } T = \{ v \in V \ / \ T(v) = 0 \}$$

La **imagen** de T es el conjunto

$$\text{Im } T = \{ w \in W \ / \ \exists v \in V \ \text{ talque } \ T(v) = w \}$$

Ejemplo: Determinemos el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $T : \Re^3 \to \Re^2$; $T(x, y, z) = (x - 2y, \ 3y + z)$.

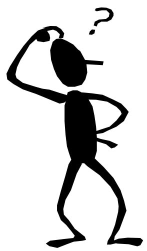
$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= \{(x, y, z) \ / \ T(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \ / \ x - 2y = 0 \ \text{ y } \ 3y + z = 0 \} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales obtenemos

$$\text{Ker } T = \{(x, y, z) \ / \ x = 2y \ \wedge \ z = -3y\}$$
$$= \{(2y, y, -3y) \ / \ y \in \Re\}$$
$$= \langle \{ (2, 1, -3) \} \rangle$$

Es decir, el núcleo de T resultó ser un subespacio de dimensión uno del espacio $\Re^3$.

$$\text{Im } T = \{ T(x, y, z) \ / \ (x, y, z) \in \Re^3 \}$$
$$= \{ (x - 2y, 3y + z) \ / \ x, y, z \in \Re \}$$
$$= \langle \{ (1, 0), (-2, 3), (0, 1) \} \rangle$$
$$= \langle \{ (1, 0), (0, 1) \} \rangle$$
$$= \Re^2$$



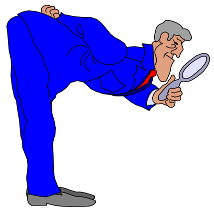
¿Cuál es el kernel y la imagen de las aplicaciones

$$T_o : V \to W; \;\; T_o(v) = 0_W$$
$$I_V : V \to V; \;\; I(u) = u \,?$$

$$\mathbf{Ker}\; T_o = V, \;\; \mathbf{Im}\; T_o = \{0\}, \;\; \mathbf{Ker}\; I_V = \{0\} \;\; \mathbf{e} \;\; \mathbf{Im}\; I_V = V.$$

El núcleo y la imagen de una transformación lineal no son simples conjuntos como se aprecia en el siguiente teorema, cuya demostración se deja de ejercicio.

Teorema: Si T de V en W es una aplicación lineal, entonces el núcleo de T es un subespacio de V y la imagen de T es un subespacio de W.



La dimensión del núcleo de T se llama **nulidad de T** y la dimensión de la imagen de T es el **rango de T.**

La nulidad de T y el rango de T serán denotados así,

$$\eta(T) = \dim\,(\mathrm{Ker}\ T) \qquad\qquad \rho(T) = \dim\,(\mathrm{Im}\ T)$$

Y se demuestra el siguiente teorema que relaciona estos números mediante la igualdad

$$\boxed{\eta(T) + \rho(T) = \dim V}$$

En consecuencia,

$$\boxed{\eta(T) = \dim V - \rho(T) \qquad \rho(T) = \dim V - \eta(T)}$$

Ejemplo: Consideremos la aplicación lineal

$$T : P_2[x] \to \Re^2; \quad T(a + bx + cx^2) = (a - b,\ 2a + c)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}T &= \{a+bx+cx^2 \in P_2[x] \ / \ (a-b,\ 2a+c) = (0,0)\} \\
&= \{a+bx+cx^2 \in P_2[x] \ / \ a = b \ \wedge \ c = -2a\} \\
&= \{a+ax-2ax^2 \ / \ a \in \Re\} \\
&= \{a(1+x-2x^2) \ / \ a \in \Re\} \\
&= <\{1+x-2x^2\}>
\end{aligned}$$

Como $B = \{1 + x - 2x^2\}$ es un conjunto generador de Ker T y es linealmente independiente, puesto que tiene sólo un vector no nulo, B es una base de Ker T; luego $\eta(T) = 1$.
Así, el rango de T es

$$\rho(T) = \dim V - \eta(T) = 3 - 1 = 2.$$

Si la dimensión de la imagen de T es 2, debe tenerse que,

$$\text{Im}\,(T) = \Re^2$$

El siguiente teorema caracteriza a las aplicaciones lineales inyectivas, epiyectivas y por lo tanto biyectivas.

Teorema: Sea $T : V \longrightarrow W$ aplicación lineal.

(1) T inyectiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\eta(T) = 0$

(2) T epiyectiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} T = W$ $\Leftrightarrow$ $\rho(T) = \dim W$

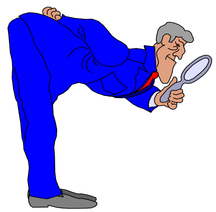
Por ejemplo, si $V \neq \{0\}$, la aplicación lineal T_0 (ejemplo 5) no es inyectiva. Pero la aplicación identidad I_V (ejemplo 6) es inyectiva y epiyectiva, es decir, I_V es biyectiva.

Ejercicio: Determine si la transformación lineal F definida a continuación es o no es biyectiva.

$$F : M_2(\Re) \to M_2(\Re),\ F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b + 3c & a + 2b - c + d \\ -b + c + d & 3b - 3c - 2d \end{pmatrix}$$

Isomorfismos

Recordemos que una función f posee función inversa f^{-1} si y sólo si f es biyectiva. La función f^{-1} también resulta ser biyectiva y tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y $(f \circ f^{-1})(x) = x$.



Definición: Un isomorfismo es una aplicación que es lineal y biyectiva.

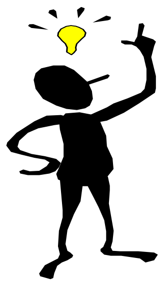
Ejemplo: La aplicación lineal $T : \Re^3 \rightarrow \Re^3$ definida por

T(x, y, z) = (x – y, 2y + z, x + y + z)

no es un isomorfismo puesto que Ker T = < {(1, 1, -2)}> y, en consecuencia, no es inyectiva.

Ejercicio: **Muestre que la siguiente aplicación de $\Re^3$ en $\Re^3$ es un isomorfismo,**

$$T(x, y, z) = (x - y,\ 2y + z,\ x + 2y + z)$$



Si T es una aplicación lineal de V en W, entonces,

- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T invertible
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^{-1} lineal
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^{-1} isomorfismo

Y si dimV = dimW, entonces

T biyectiva $\Leftrightarrow$ T inyectiva $\Leftrightarrow$ T epiyectiva

Ejercicio: **Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones T son invertibles?**

1) $T:\Re^3 \to \Re^3;\quad T(x,y,z)=(x,2x-y,x+4y-z)$

2) $T:\Re^3 \to P_2[x];\quad T(a,b,c)=(a-c)+(2a+b+c)x+(3a+b+c)x^2$

3) $T:M_2(\Re) \to \Re^4;\quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a+d,\ 2c,\ a+c,\ c-d)$

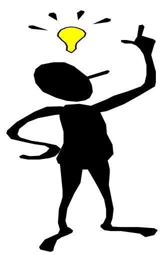
Si $T:\ V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces se dice que los espacios V y W son **isomorfos**, en cuyo caso se anota

$$V \cong W$$

Ejemplo: Los espacios $\Re^3$ y $P_2[x]$ son isomorfos; el isomorfismo "natural" entre ellos es

$$T(a,b,c) = a + bx + cx^2$$

El isomorfismo $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a,\ b,\ c,\ d)$ establece que los espacios $M_2(\Re)$ y $\Re^4$ son isomorfos.

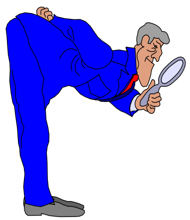


La relación "ser isomorfo a" es una relación de equivalencia entre espacios vectoriales, es decir,

i) $V \cong V$

ii) $V \cong W \Rightarrow W \cong V$

iii) $(V \cong W \ \wedge \ W \cong U) \Rightarrow V \cong U$



Teorema: Todo espacio vectorial real de dimensión finita n es isomorfo a $\Re^n$.

En efecto, sea V espacio vectorial real de dimensión n y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

Definamos $T : V \longrightarrow \Re^n$ por $T(v) = [v]_B$; entonces,

- T es aplicación lineal.
- Ker T = $\{ v \in V \ / \ [v]_B = (0, \ldots, 0) \} = \{0\}$; luego T es inyectiva.
- Como la nulidad de T es cero, el rango de T es n, es decir, la imagen de T es un subespacio de $\Re^n$ de dimensión n; entonces Im T = $\Re^n$ y T es epiyectiva.
- Así T es un isomorfismo y $V \cong \Re^n$.

El teorema precedente es más general; se puede enunciar lo siguiente:

Teorema: Sea V espacio vectorial sobre el cuerpo κ de dimensión finita n. Entonces V es isomorfo a κ^{n}.

Ejercicio: Demuestre

1) **El teorema precedente.**
2) **Que el espacio de las matrices reales diagonales de orden 3 es isomorfo a $\Re^3$.**
3) **Que el espacio de las matrices reales antisimétricas de orden 3 es isomorfo a $\Re^3$.**

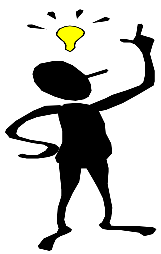
El espacio de las transformaciones lineales

Sean V y W espacios vectoriales sobre κ y denotemos por $L(V, W) = \{T : V \to W \ / T$ lineal$\}$. Se puede demostrar que:

1) $T, S \in L(V, W) \Rightarrow T+S \in L(V, W)$

2) $\alpha \in \kappa$ y $T \in L(V, W) \Rightarrow \alpha T \in L(V, W)$

3) $T_o \in L(V, W)$



Las aplicaciones $T+S$ y αT están dadas por:

(T+S)(v) = T(v) + S(v)

(α T)(v) = α T(v)

Por lo tanto, $L(V, W)$ es un espacio vectorial sobre K ; **el espacio de las transformaciones lineales de V en W**.

Si $T, S \in L(V, W)$, el producto (TS)(v) = T(v) S(v) puede no estar definido.

Pero aún existiendo TS, este no es lineal. Por ejemplo, sean T, S las transformaciones lineales de $\Re$ en $\Re$ dadas por T(x) = 3x, S(x) = 2x. Entonces (TS)(x) = $6x^2$, que no es lineal.

Sean $T \in L(V, W)$ y $S \in L(W,U)$; entonces la composición de T y S, $(S \circ T)(v) = S(T(v))$, es una transformación lineal.

En efecto, si $u, v \in V$ y $\alpha, \beta \in \kappa$, entonces

$$
\begin{aligned}
(S \circ T)(\alpha u + \beta v) &= S(T(\alpha u + \beta v) \\
&= S(\alpha T(u) + \beta T(v)) \\
&= \alpha\, S(T(u)) + \beta\, S(T(v)) \\
&= \alpha\, (S \circ T)(u) + \beta\, (S \circ T)(v)
\end{aligned}
$$

Recuerde que la composición de funciones es asociativa y distributiva con la suma:

$$S \circ (T \circ R) = (S \circ T) \circ R \quad y \quad S \circ (T + R) = (S \circ T) + (S \circ R)$$

Además, $T \circ I_V = T$ y $I_W \circ T = T$

Por estas razones, la composición de funciones es considerada como **producto** en el espacio de las transformaciones lineales.

En lo que sigue, y siempre que T S exista, se entenderá que

$$(T\ S)(v) = T\ (S(v))$$

Observe que este producto no es conmutativo y además no todas las transformaciones lineales poseen inversa.

Ejercicio: Sean $T \in L(V, W)$ y $S \in L(W, U)$ **aplicaciones lineales invertibles. Demuestre que el producto de T y S es invertible y se tiene que** $(S\ T)^{-1} = T^{-1} S^{-1}$.

Aplicación lineal asociada a una matriz

Sea $A \in M_{mxn}(\Re)$ y consideremos la aplicación,

$$T_A : \Re^n \to \Re^m \quad \text{definida por } T_A(X) = A\,X$$

Para $X,\ Y \in \Re^n$ y $\alpha \in \Re$ se tiene que,

i) $T_A(X+Y) = A(X+Y) = A\,X + A\,Y = T_A(X) + T_A(Y)$

ii) $T_A(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha(A\,X) = \alpha\,T_A(X)$

Es decir, T_A es una transformación lineal.

La transformación lineal T_A se llama **aplicación lineal asociada a la matriz A.**

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ y determinemos la aplicación lineal asociada a A.

$$T_A : \Re^2 \rightarrow \Re^3 ; \quad T_A(x,\ y) = \ ??$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5y \\ 3x-y \\ 2x-4y \end{pmatrix}$$

$$T_A : \Re^2 \rightarrow \Re^3 ; \quad T_A(x,\ y) = (x+5y,\ 3x-y,\ 2x-4y)$$

Ejercicio: Encuentre la aplicación lineal asociada a las matrices $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ e $\quad I_3$

Aplicaciones lineales y matrices

Apreciamos cierto parecido, desde un punto de vista algebraico, entre el **espacio de las aplicaciones lineales** y cierto espacio de matrices.

Más precisamente, pretendemos establecer que el espacio $L(\Re^n, \Re^m)$ es isomorfo a $M_{mxn}(\Re)$. Para ello debemos mostrar una función, entre estos espacios, que sea un isomorfismo. Consideremos,

$$F : M_{mxn}(\Re) \to L(\Re^m, \Re^n) \text{ definida por } F(A) = T_A$$

Se tiene que:

✓ F es una función bien definida y además es lineal, puesto que $T_{A+B} = T_A + T_B$ y $T_{\alpha A} = \alpha T_A, \quad \alpha \in \Re$

Ejercicio: Demuestre estas igualdades.

✓ F es inyectiva pues Ker F = $\{ A \ / \ T_A = T_o \} = \{ 0_{mn} \}$

✓ F es epiyectiva ya que para cada transformación lineal T de $\Re^n$ en $\Re^m$, existe una matriz $A \in M_{mxn}(\Re)$ tal que F(A) = T_A = T . Esta matriz A es única, se llama **matriz asociada a la transformación lineal T**, se denota **[T]** y se determina así:

Sean $\{e_1,.....,e_n\}$ y $\{e_1,.....,e_m\}$ las bases canónicas de $\Re^n$ y $\Re^m$ respectivamente. Entonces,

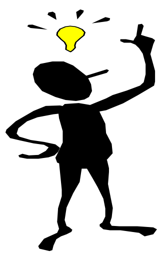
$$\begin{aligned}
T(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots\ldots + a_{m1}e_m \\
T(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots\ldots + a_{m2}e_m \\
\ldots\ldots & \qquad\qquad \ldots\ldots \\
T(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots\ldots + a_{mn}e_m
\end{aligned}$$

y la matriz,

$$A = [T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots. & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots. & a_{m2} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix}^t$$

es decir, la matriz $A = [T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

es tal que, $F([T]) = F(A) = T_A = T$.



Por lo tanto, F es un isomorfismo y queda establecido que

$$L(\Re^n, \Re^m) \cong M_{mxn}(\Re)$$

Ejemplo: Consideremos la aplicación lineal,

$$T: \Re^2 \to \Re^3 ; \quad T(x,\ y) = (4x - 2y,\ x + 3y,\ 2x + 5y)$$

y determinemos la matriz asociada a T.

Procedemos a evaluar T en los vectores de la base canónica de $\Re^2$ y luego, a escribir estas imágenes como combinación lineal de los vectores de la base canónica de $\Re^3$.

$$T(1, 0) = (4,\ 1,\ 2) = 4(1,\ 0,\ 0) + 1(0,\ 1,\ 0) + 2(0,\ 0,\ 1)$$

$$T(0, 1) = (-2,\ 3,\ 5) = -2(1,\ 0,\ 0) + 3(0,\ 1,\ 0) + 5(0,\ 0,\ 1)$$

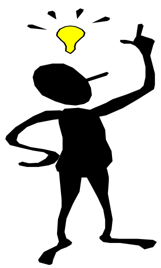
Entonces la matriz asociada a T es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Determine la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales.

$$T:\Re^3 \to \Re^2;\quad T(x,\ y,\ z) = (-x + 3y - 7z,\ 2x - y + z)$$

$$T:\Re^3 \to \Re^3;\quad T(x,\ y,\ z) = (7y - z,\ x + 6z,\ 5x - y + 2z)$$



Consecuencia del isomorfismo

$$L(\Re^n,\ \Re^m) \cong M_{mxn}(\Re)$$

que se ha establecido tenemos que:

$$[T + S] = [T] + [S]$$

$[a\ T] = a\ [T]$, a número real

Además, $[T \circ S] = [T]\ [S]$ y si T es invertible, $[T^{-1}] = [T]^{-1}$

Matriz asociada - Caso general

Consideremos ahora V y W espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente y sea $T: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Repetimos el procedimiento realizado para obtener la matriz asociada a T pero considerando las bases $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{w_1, \ldots, w_m\}$ de V y W respectivamente. Evaluamos T en los vectores de B y luego expresamos estas imágenes como combinación lineal de los vectores de E.

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \\ &\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

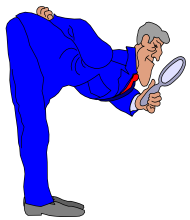
La matriz,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denota $[T]_B^E$ y es la **matriz asociada a la transformación lineal T o matriz de representación de T**, cuando se consideran las bases B de V y E de W.

Cuando n = m y B = E , la matriz $[T]_B^E$ se denota $[T]_B$.

La matriz $[T]_B^E$ está caracterizada así:



Si las coordenadas de $v \in V$ con respecto a la base B son $[v]_B = X = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces $[T]_B^E \cdot X$ son las coordenadas de la imagen T(v) con respecto a la base E.

La matriz de representación de T establece un isomorfismo entre el espacio $L(V,W)$ y el espacio $M_{mxn}(\kappa)$.

Consecuencia de este isomorfismo es lo siguiente:

Si T y S son transformaciones lineales de V en W, B y E son bases de V y W respectivamente, entonces:

$$[T+S]_B^E = [T]_B^E + [S]_B^E$$

$$[\alpha T]_B^E = \alpha [T]_B^E , \quad \alpha \in \kappa$$

Además, si T: V $\longrightarrow$ W y S: W $\longrightarrow$ U son transformaciones lineales y B, E, C son bases de V, W y U respectivamente, entonces

$$[S \circ T]_B^C = [S]_E^C \cdot [T]_B^E$$

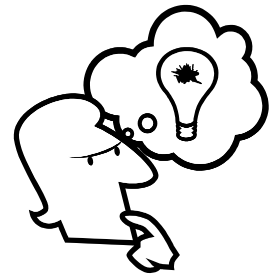
Si T: V $\longrightarrow$ W es una aplicación lineal **invertible** y B, E son bases de V y W respectivamente, entonces

$$[T]_B^E \cdot [T^{-1}]_E^B = [T \circ T^{-1}]_E^E = [I_W]_E^E = I_n$$

y $\quad [T^{-1}]_E^B \cdot [T]_B^E = [T^{-1} \circ T]_B^B = [I_V]_B^B = I_n$

Por lo tanto, $[T]_B^E$ es **invertible** y se tiene que:

$$([T]_B^E)^{-1} = [T^{-1}]_E^B$$



Finalmente, el rango de T es

$$\rho(T) = \dim(\mathrm{Im}\ T) = \rho([T]_B^E)$$

Ejemplo: Consideremos la aplicación lineal,

$$T : \Re^3 \to \Re^2 ; \quad T(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 3x + z)$$

y determinemos la matriz $[T]_B^E$ donde B = { (1,1,1), (1,1, 0), (1, 0, 0)} base de $\Re^3$ y E = {(2, 3), (-3, -5)} base de $\Re^2$.

Tenemos que calcular las coordenadas $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ originadas así:

$$T(1,1,1) = (2,4) = \alpha_1(2,3) + \alpha_2(-3,-5)$$
$$T(1,1,0) = (3,3) = \beta_1(2,3) + \beta_2(-3,-5)$$
$$T(1,0,0) = (1,3) = \gamma_1(2,3) + \gamma_2(-3,-5)$$

De este modo obtenemos la matriz:

$$[T]_B^E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Determinemos la matriz $[T]_B^E$ asociada a la transformación lineal T de $P_3[x]$ en $P_2[x]$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$ si $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $E = \{1, x, x^2\}$.

En este caso,

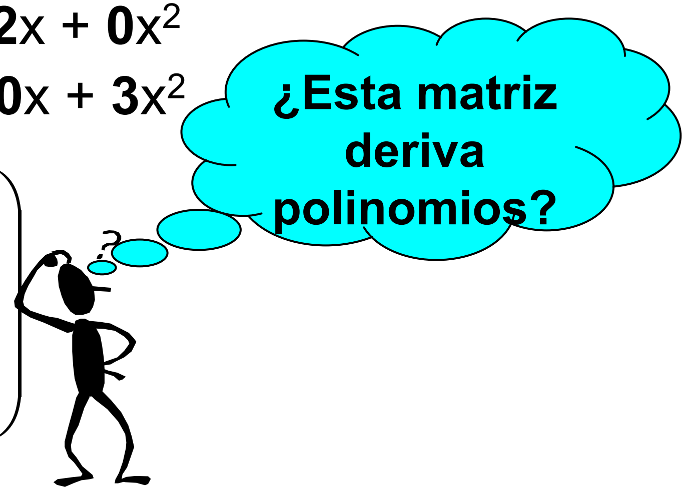
$$T(1) = 0 \quad = \mathbf{0} + \mathbf{0}x + \mathbf{0}x^2$$

$$T(x) = 1 \quad = \mathbf{1} + \mathbf{0}x + \mathbf{0}x^2$$

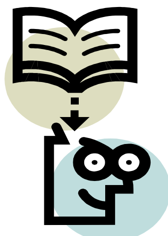
$$T(x^2) = 2x = \mathbf{0} + \mathbf{2}x + \mathbf{0}x^2$$

$$T(x^3) = 3x^2 = \mathbf{0} + \mathbf{0}x + \mathbf{3}x^2$$

Por lo tanto, $[T]_B^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$



Ejemplo: Determinemos la matriz asociada a la aplicación identidad de $\Re^2$ en los siguientes casos $[\,I\,]_E^E$ $[\,I\,]_B^E$, $[\,I\,]_E^B$ y $[\,I\,]_B^B$ donde E = {e_1, e_2} es la base canónica de $\Re^2$ y B = {v_1 =(1, -2), v_2 = (3, -4)}.



Puesto que, $e_1 = \mathbf{1}e_1 + \mathbf{0}e_2$, $e_2 = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{1}e_2$

y $v_1 = \mathbf{1}v_1 + \mathbf{0}v_2$, $v_2 = \mathbf{0}v_1 + \mathbf{0}v_2$

obtenemos $[\,I\,]_E^E = I_2 = [\,I\,]_B^B$

Verifique que en los otros casos,

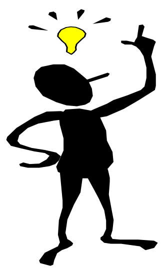
$$[\,I\,]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [\,I\,]_E^B = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Matriz de cambio de base

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y B es cualquier base de V, entonces la matriz de la aplicación identidad es $[I_V]_B^B = [I_V]_B = I_n$. Pero si E es otra base de V, entonces $[I_V]_B^E \neq I_n$. Observe lo siguiente:

$$[I_V]_B^E \cdot [I_V]_E^B = [I_V \circ I_V]_E^E = [I_V]_E^E = I_n$$

$$[I_V]_E^B \cdot [I_V]_B^E = [I_V \circ I_V]_B^B = [I_V]_B^B = I_n$$



Es decir, la matriz $[I_V]_B^E$ es invertible y su inversa es $[I_V]_E^B$.

Las matrices $[I_V]_{B}^{E}$ y $[I_V]_{E}^{B}$ son llamadas **matrices de cambio de base**, nombre que se deriva de lo siguiente:

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n, B y E son bases de V y $T: V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} [I_V]_{E}^{B} \cdot [T]_{E}^{E} = [T]_{E}^{B} \\ [T]_{E}^{E} \cdot [I_V]_{B}^{E} = [T]_{B}^{E} \\ [I_V]_{E}^{B} \cdot [T]_{E}^{E} \cdot [I_V]_{B}^{E} = [T]_{B}^{B} \end{array}}$$

Ejercicio: Considere la transformación lineal F de $\Re^3$ en $P_2[x]$ definida por $F(a, b, c) = a + (2b+c)\,x + (b-a)\,x^2$.

Determine:

(1) La matriz [F] asociada a F.

(2) La matriz $[F^{-1}]$ asociada a F^{-1}.

(3) La expresión algebraica $F^{-1}(a + bx + cx^2)$.

(4) La matriz $[F]_B^E$ de representación de F cuando se consideran la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ canónica de $\Re^3$ y $E = \{1 + x - x^2,\ 2 + x,\ x^2 - x\}$ base de $P_2[x]$.

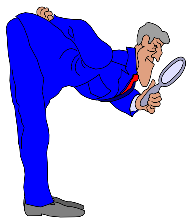
Ejercicio: Considere F: $\Re^3 \longrightarrow P_2[x]$ la aplicación lineal tal que F(1,0,2) = 2x – 3, F(0,1,2) = 1 + x^2 y F(0,0,1) = 2x – x^2. Sea G: $P_2[X] \longrightarrow \Re^2$ lineal cuya matriz de representación en las bases B = {1, 1+x, 1+x+x^2} y C = {(1,0), (0,3)} es $[G]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determine la matriz $[2G \circ F]$ (bases canónicas).

Ejercicio: Sea V un espacio vectorial real de dimensión 2 con base B = {u, v} y T una aplicación lineal de V en V tal que T(2u + v) = -4u - v y T(u) - 2T(v) = -7u + 2v. Exprese T(u) y T(v) como combinación lineal de los vectores de la base B y a partir de esto encuentre la matriz $[T]_B$.

Diagonalización de matrices reales

Valores y vectores propios

Sea V espacio vectorial real. En lo que sigue, T será una transformación lineal de V en V; por lo tanto cualquier matriz asociada a T es una matriz cuadrada.



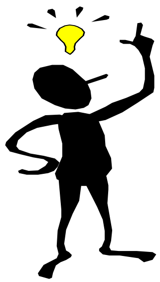
Un escalar $\lambda \in \Re$ se llama **valor propio de T** (o valor característico) si existe $v \in V, \ v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Si $\lambda \in \Re$ es un valor propio de T, cualquier $v \in V, \ v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$ se llama **vector propio de T** (o vector característico de T) asociado al valor propio λ .

Ejemplo: $\lambda = 2$ es un valor propio de la aplicación lineal

$$T : \Re^2 \to \Re^2 ; \quad T(x,\ y) = (27x - 10y,\ 75x - 28y)$$

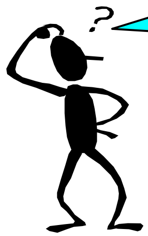
puesto que T(2, 5) = (4, 10) = 2 (2, 5). En este caso, v = (2,5) es un vector propio de T asociado al valor propio 2.



Si λ es un valor propio de T y denotamos por V_λ al conjunto de todos los vectores propio de T asociados al valor propio λ, entonces es fácil mostrar que V_λ resulta ser un subespacio de V. El subespacio V_λ se llama **espacio propio de T** asociado a λ.

$$V_\lambda = \{ v \in V \ / \ T(v) = \lambda v \}$$

¿Cómo determinamos los valores propios de T?



λ es un valor propio de T $\Leftrightarrow$

$$\exists\, v \in V,\; v \neq 0 \;\text{ tal que }\; T(v) = \lambda\, v \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, v \in V,\; v \neq 0 \;\text{ tal que }\; T(v) - \lambda\, v = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, v \in V,\; v \neq 0 \;\text{ tal que }\; (T - \lambda\, I_n)(v) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\, v \in V,\; v \neq 0,\;\; v \in \operatorname{Ker}(T - \lambda\, I_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$T - \lambda\, I_n \;\text{ no invertible } \quad \Leftrightarrow$$

$$\det\,[T - \lambda\, I_n] = 0$$

Observe que $p(\lambda) = \det[T - \lambda I_n]$ es un polinomio en λ de grado n y los valores propios de T son las raíces reales de dicho polinomio o de la ecuación $p(\lambda) = 0$. Note que

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(T - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\lambda I - T) = 0$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{ v \in \Re^n \ / \ T(v) = \lambda v \} \\ &= \{ v \in \Re^n \ / \ T(v) - \lambda v = 0 \} \\ &= \{ v \in \Re^n \ / \ (T - \lambda I_n)(v) = 0 \} \\ &= \operatorname{Ker}(T - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Es decir, los vectores propios de T asociados a λ son los vectores del kernel de la transformación lineal $[T - \lambda I_n]$.

Ejemplo: Sea T la transformación lineal

$$T:\Re^2 \rightarrow \Re^2 ;\ \ T(x,\ y)=(-y,\ x)$$

La matriz asociada a T es $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como la **"ecuación característica"** de T,

$$p(\lambda)=0 \ \Leftrightarrow\ \det[\lambda\, I - T]=0 \ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^2+1=0,$$

no tiene raíces reales, T no tiene valores propios.

Ejercicio: Muestre que los valores propios de la siguiente transformación lineal T son 1 y 2.

$$T:\Re^3 \rightarrow \Re^3 ;\ \ T(x, y, z)=(3x+y-z,\ 2x+2y-z,\ 2x+2y)$$

Ejemplo: Los vectores propios de la transformación lineal

$$T:\Re^3 \to \Re^3;\ \ T(x,y,z) = (3x+y-z,\ 2x+2y-z,\ 2x+2y)$$

se encuentran en $\mathrm{Ker}[T - I_3]$ y en $\mathrm{Ker}[T - 2I_3]$, es decir,

$$\mathrm{Ker}[T - I_3] = \{ (x,\ y,\ z) \in \Re^3 \ / \ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \\ 2x + 2y - z & = & 0 \end{array} \}$$

$$= \ < \{ (1,\ 0,\ 2) \} >$$

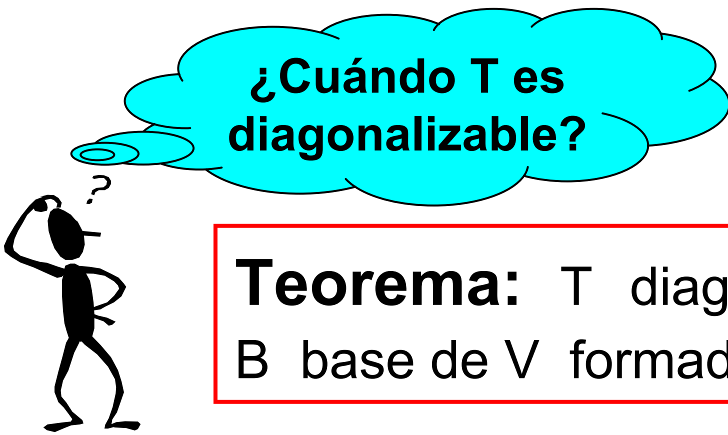
$$\mathrm{Ker}[T - 2I_3] = \{ (x,\ y,\ z) \in \Re^3 \ / \ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{array} \}$$

$$= \ < \{ (1,\ 1,\ 2) \} >$$

Diagonalización

Se dice que una base B de V diagonaliza a la transformación lineal T si la matriz $[T]_B$ asociada a T es una matriz diagonal. Cuando tal base B existe, se dice que T es diagonalizable.

Una matriz $A \in M_n(\Re)$ es diagonalizable si la aplicación lineal asociada a A lo es.



Teorema: T diagonalizable si y sólo si existe B base de V formada por vectores propios de T.

En efecto, sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V con $v_1, \ldots, v_n$ vectores propios de T. Entonces,

$$
\begin{aligned}
T(v_1) &= \lambda_1 v_1 &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \ldots\ldots + 0v_n \\
T(v_2) &= \lambda_2 v_2 &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots\ldots + 0v_n \\
&\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
T(v_n) &= \lambda_n v_n &= 0v_1 + 0v_2 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n
\end{aligned}
$$

donde λ_i son valores propios de T no necesariamente distintos. La matriz de representación de T en la base B es:

$$
[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots. & 0 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & \ldots. & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

Ejemplo: La transformación lineal $T:\Re^3 \to \Re^3$;

$$T(x, y, z) = (-9x - 8y + 4z,\ 8x + 7y - 4z,\ -8x - 8y + 3z)$$

tiene dos valores propios: 3 y -1. Los espacios propios asociados son,

$$\mathrm{Ker}[T - 3I_3] = <\{(1, -1, 1)\}>$$

$$\mathrm{Ker}[T + I_3] = <\{(1, 0, 2),\ (0, 1, 2)\}>$$

Y B = {(1, -1, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 2)} es una base de $\Re^3$ que diagonaliza a T; en este caso,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: La transformación lineal $T:\Re^3 \to \Re^3$;

$$T(x, y, z) = (3x + y - z,\ 2x + 2y - z,\ 2x + 2y)$$

tiene dos valores propios: 1 y 2. Sin embargo, T no es diagonalizable. Los espacios propios asociados son,

$$\mathrm{Ker}[T - I_3] = <\{(1, 0, 2)\}>$$

$$\mathrm{Ker}[T - 2I_3] = <\{(1, 1, 2)\}>$$

Y es imposible encontrar una base de $\Re^3$ formada por vectores propios de T.

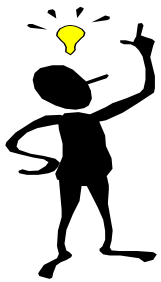
Otros criterios de diagonalización

Teorema: T diagonalizable si y sólo si el polinomio característico de T tiene la forma $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdot\ldots\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{d_k}$ con $d_i=\dim V_{\lambda_i}$ y V_{λ_i} espacio propio de T asociado al valor propio λ_i.

Por ejemplo, el polinomio característico de la transformación lineal $T(x,y,z)=(-9x-8y+4z,\ 8x+7y-4z,\ -8x-8y+3z)$ es

$$p(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$$

Y $\dim V_{\lambda=3}=1,\quad \dim V_{\lambda=-1}=2$; luego T diagonalizable.



Teorema: T diagonalizable si y sólo si

$$\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \ldots\ldots + \dim V_{\lambda_k}$$

donde $\lambda_1, \ldots.., \lambda_k$ son los valores propios de T y V_{λ_i} es el espacio propio de T asociado al valor propio λ_i.

Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal diagonalizable del ejemplo anterior

$$T(x, y, z) = (-9x - 8y + 4z,\ 8x + 7y - 4z,\ -8x - 8y + 3z)$$

se tiene que $\dim\ V_{\lambda=3}\ +\ \dim\ V_{\lambda=-1} = 1 + 2 = \dim \Re^3$

Ejercicio: **Determine si la siguiente transformación lineal T es o no es diagonalizable.**

$$T:\Re^3 \to \Re^3\;;\;\; T(x,y,z)=(3x-y+z,\ 7x-5y+z,\ -6x+6y-2z)$$

El hecho que T sea diagonalizable significa que la matriz $[T]$ asociada a T, es "**similar**" a la matriz diagonal $[T]_B$ en el sentido siguiente:

Existe P matriz invertible tal que $[T]_B = P^{-1}[T]\,P$

Ejercicio: **Demuestre que los valores propios de una matriz triangular $A=(a_{ij})$ son los elementos a_{ii} de la diagonal.**