Clase 9
Sistemas de ecuaciones no lineales

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2014

Sistemas de ecuaciones no lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal, se llama un sistema de ecuaciones no lineales.

Al igual que en un sistema de ecuaciones lineales, una solución del sistema es un par (x, y) que satisface ambas ecuaciones.

Geométricamente, cada ecuación representa una curva en el plano y el par ordenado (x, y) que es solución del sistema (en caso de existir), corresponde a el o los puntos de intersección entre ambas curvas.

Problema 1: Resuelva el sistema

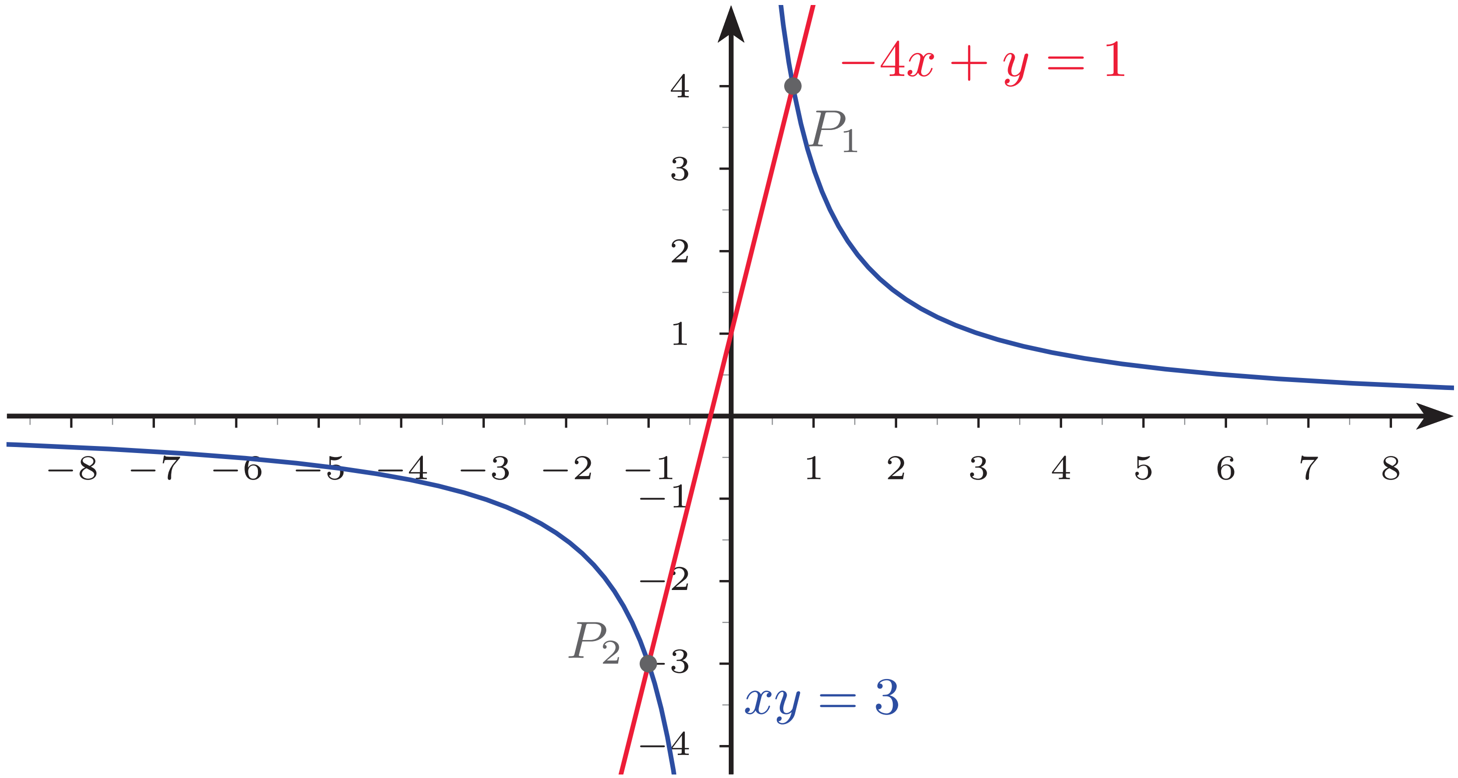
$$\begin{aligned} -4x + y &= 1 \\ xy &= 3 \end{aligned}$$

Solución: Cada ecuación del sistema representa una curva en el plano, en este caso,

- la primera ecuación corresponde a la función lineal $y = 4x + 1$ y por lo tanto representa una recta en el plano.
- la segunda ecuación se puede expresar como la función racional $y = \dfrac{3}{x}$, cuya gráfica es una hipérbola.

Antes de intentar resolver el sistema, es buena idea dibujar las curvas representadas por las ecuaciones de modo de saber a priori si existen soluciones del sistema (puntos en común en ambas gráficas) y en tal caso al menos intuir cuántas existen y dónde se ubican.

La siguiente figura muestra los puntos de intersección entre la recta $-4x + y = 1$ y la hipérbola $xy = 3$.



Se puede observar que las curvas se cortan en los puntos $P_1\left(\frac{3}{4}, 4\right)$ y $P_2(-1, -3)$ y por lo tanto, resolviendo algebraicamente, se debiesen obtener dos soluciones.

$$
\begin{aligned}
-4x + y &= 1 \\
xy &= 3,
\end{aligned}
$$

despejando y en la primera ecuación, se obtiene $y = 1 + 4x$ y sustituyendo en la segunda ecuación, se tiene que $x(1 + 4x) = 3$, es decir, se debe resolver la ecuación cuadrática $4x^2 + x - 3 = 0$.

$$
\begin{aligned}
4x^2 + x - 3 &= 0 \\
(2x)^2 + \frac{1}{2}(2x) - 3 &= 0, \quad \text{factorizando,} \\
(2x + 2)(2x - 3/2) &= 0 \\
4(x + 1)(x - 3/4) &= 0.
\end{aligned}
$$

así se obtienen las soluciones $x_1 = \dfrac{3}{4}$ y $x_2 = -1$, de modo que reemplazando en $y = 1 + 4x$ se obtienen respectivamente $y_1 = 4$ e $y_2 = -3$, por lo tanto las soluciones al sistema son los pares ordenados $P_1\left(\dfrac{3}{4}, 4\right)$ y $P_2(-1, -3)$ tal como se observa en la gráfica.

Problema 2: Determine las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 &= 4 \\ x + y &= 2. \end{aligned}$$

Solución:

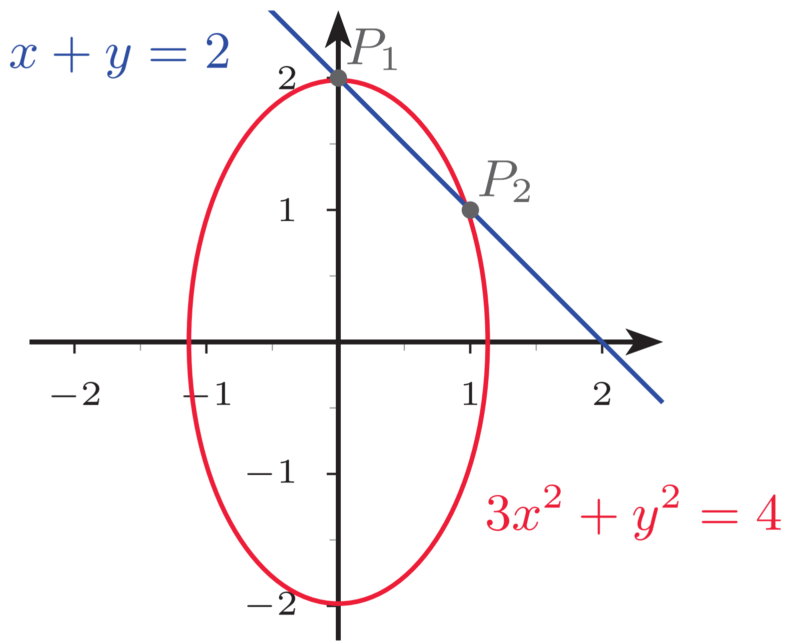
Reescribiendo la primera ecuación en la forma $\dfrac{x^2}{(2/\sqrt{3})^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$, notamos que ésta representa la elipse con centro en el origen y semieje mayor en el eje Y.

La segunda ecuación representa la recta de pendiente -1 y coeficiente de posición 2.

En esta situación, el sistema puede tener a lo más dos soluciones;

1. Si la recta no corta a la elipse el sistema no tiene solución.
2. Si la recta es tangente a la elipse, el sistema tiene solución única.
3. Finalmente si la recta es secante a la elipse, se tendrán dos soluciones.

Graficando ambas curvas, se obseva que la recta corta a la elipse en dos puntos y por lo tanto el sistema tiene dos soluciones:



Resolviendo algebraicamente, se deben encontrar las soluciones: $P_1(0, 2)$ y $P_2(1, 1)$.

Despejando y de la segunda ecuación se tiene que $y = 2 - x$, reemplazando en la primera ecuación, se obtiene la ecuación de segundo grado

$$3x^2 + (2 - x)^2 = 4,$$

resolviendo el cuadrado de binomio y agrupando los términos al lado izquierdo de la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x &= 0, \quad \text{factorizando,} \\ 4x(x - 1) &= 0, \end{aligned}$$

de donde se obtienen las soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ y reemplazando estos valores en $y = 2 - x$, se obtienen respectivamente $y_1 = 2$ e $y_2 = 1$, de modo que las soluciones del sistema son los pares ordenados $P_1(0, 2)$ y $P_2(1, 1)$, que corresponden a los puntos de intersección de la recta y la elipse, tal como se obtuvo en la resolución gráfica.

Problema 3: Resuelva el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \log_2(x) - \log_2(y) &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 12 \end{aligned} \tag{1}$$

Solución: Es posible expresar la primera ecuación de manera más simple utilizando las siguientes propiedaes de la función logaritmo

Propiedades de $f(x) = \log_a(x)$, $a > 1$

Propiedad 1 $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$

Propiedad 2 $y = \log_a(x)$ si y solo si $a^y = x$

En este caso, usamos la Propiedad 1 para expresar la primera ecuación en la forma

$$\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 1,$$

y según la Propiedad 2 , se tiene que

$$2^1 = \frac{x}{y}, \quad \text{o bien} \quad x = 2y$$

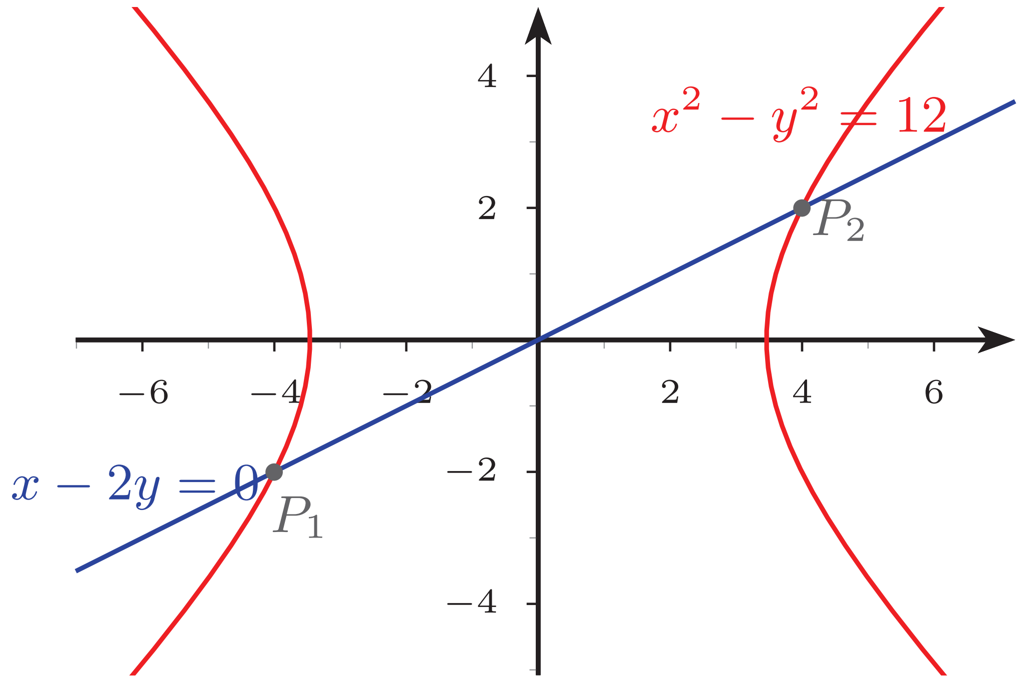
luego, el sistema (1) es equivalente a

$$\begin{aligned} x &= 2y \\ x^2 - y^2 &= 12, \end{aligned}$$

de modo que basta sustituir $x = 2y$ en la segunda ecuación para obtener:

$$\begin{aligned} (2y)^2 - y^2 &= 12 \\ 3y^2 - 12 &= 0 \\ 3(y^2 - 4) &= 0 \\ 3(y-2)(y+2) &= 0, \end{aligned}$$

de donde se obtienen las soluciones, $y_1 = 2$ e $y_2 = -2$, reemplazando en $x = 2y$ se obtienen respectivamente los valores $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$, de este modo, el sistema tiene dos soluciones $P_1(4,2)$ y $P_2(-4,-2)$ las que, al igual que en los ejemplos anteriores, corresponden a los puntos de intersección entre la recta $x = 2y$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 12$, tal como se aprecia en la siguiente gráfica.



Problema 4: Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} |x| - y &= 3 \\ (x-2)^2 + y &= 1 \end{aligned}$$

Solución: Al igual que en los ejemplos anteriores, ambas ecuaciones representan curvas en el plano y resolver el sistema equivale a encontrar (si existen) puntos de intersección entre ambas curvas.

Reescribiendo el sistema en la forma:

$$\begin{aligned} y &= |x| - 3 \\ y &= -(x-2)^2 + 1, \end{aligned}$$

es posible observar que el problema consiste en determinar los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones f y g, donde

$$f(x) = |x| - 3 \tag{2}$$

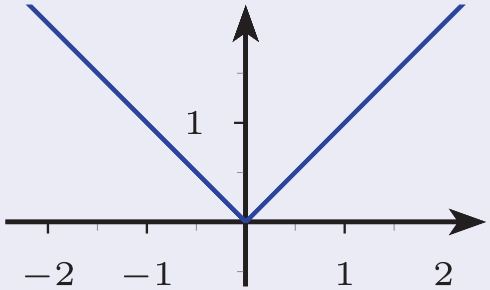
y

$$g(x) = -(x-2)^2 + 1 \tag{3}$$

Recordar que

La función valor absoluto se define como

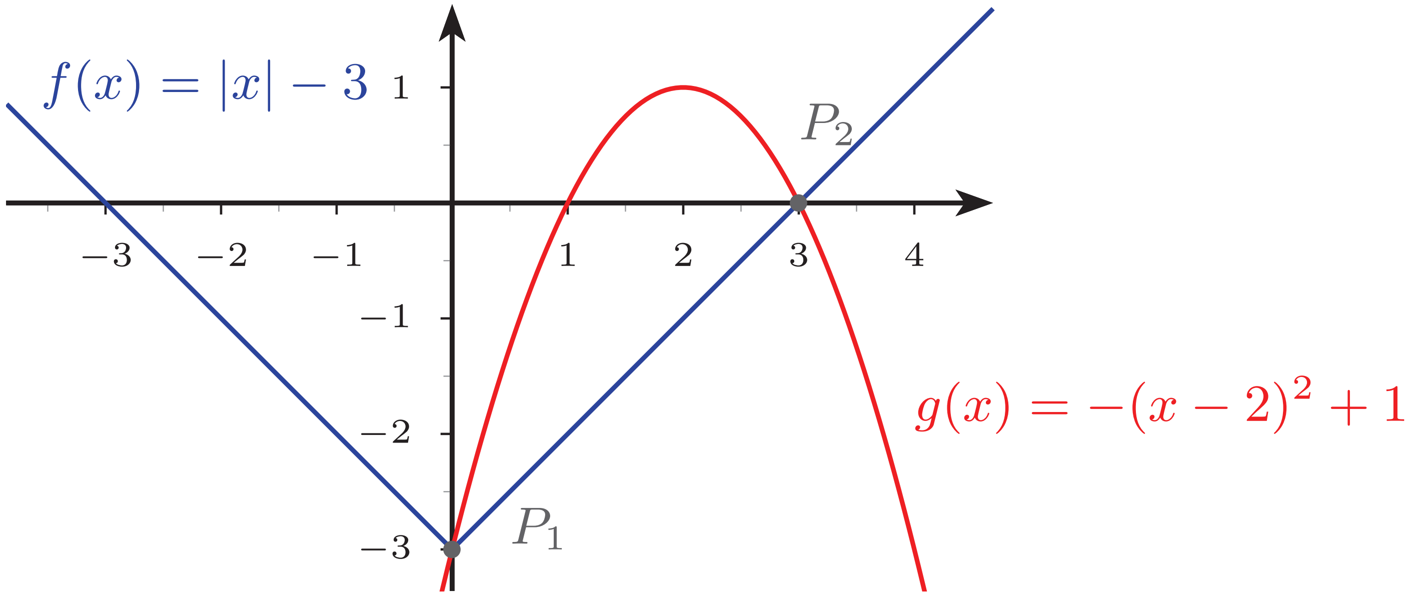
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



de modo que la gráfica de $f(x) = |x| - 3$, corresponde a la gráfica de la función valor absoluto, trasladada 3 unidades hacia abajo.

La función $g(x) = -(x-2)^2 + 1$ se puede expresar como $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ y por lo tanto su gráfica es una parábola que abre hacia abajo con vértice en el punto $(2, 1)$.

Resolución gráfica



Gráficamente es claro que el sistema tiene solución, de hecho existen dos puntos de intersección $P_1(0, -3)$ y $P_2(3, 0)$, pero ¿cómo encontrar estas soluciones de forma algebraica?.

Dado que la definición de la función valor absoluto depende del signo de x, el sistema se resuelve primero para $x \geq 0$ y luego para $x < 0$.

Para $x < 0$: usando la definición del valor absoluto, se tiene que, $|x| = -x$ y por lo tanto el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} y &= -x - 3 \\ y &= -(x-2)^2 + 1, \end{aligned} \tag{4}$$

sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} -x - 3 &= -(x-2)^2 + 1 \\ -x - 3 &= -x^2 + 4x - 3 \\ x^2 - 5x &= 0 \\ x(x-5) &= 0, \end{aligned}$$

luego $x = 0$ o bien $x = 5$, pero como en este caso x debe ser menor que cero, no existen soluciones del sistema con $x < 0$.

Para $x \geq 0$: usando la definición del valor absoluto, se tiene que, $|x| = x$ y por lo tanto el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} y &= x - 3 \\ y &= -(x-2)^2 + 1, \end{aligned} \tag{5}$$

sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} x - 3 &= -(x-2)^2 + 1 \\ x - 3 &= -x^2 + 4x - 3 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0, \end{aligned}$$

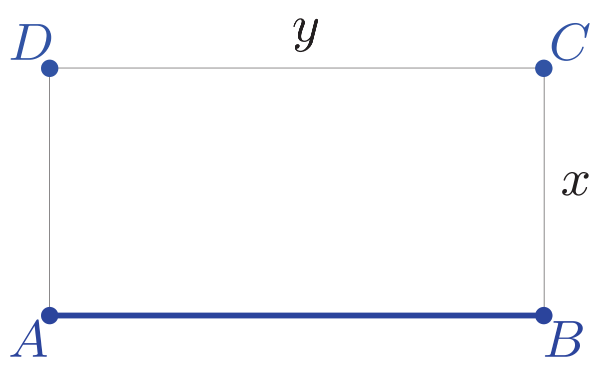
luego $x = 0$ o bien $x = 3$, de este modo reemplazando los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ en $y = x - 3$, se obtienen respectivamente, $y_1 = -3$ e $y_2 = 0$ y por lo tanto las soluciones son $(0, -3)$ y $(0, 3)$.

Problema 1

Se desea cercar un terreno rectangular que limita, en uno de sus lados, con un río. Si el área del terreno es de 2.000 m^2 y las longitudes de los tres lados a cercar suman 140 metros, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Solución: Sean x e y las medidas de los lados del terreno, como se indica en la figura.

Suponiendo que el lado AB corresponde a la orilla del río, el perímetro que se debe cercar está dado por $2x + y$, mientras que el área del terreno corresponde a $x \cdot y$.



Según el enunciado estas expresiones deben ser iguales a 140 y 2.000 respectivamente.

Por lo tanto, para conocer las dimensiones del terreno, basta resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 140 \\ xy &= 2.000 \end{aligned}$$

De la primera ecuación se tiene que $y = 140 - 2x$, reemplazando en la segunda ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} x(140 - 2x) &= 2.000 \\ 2x^2 - 140x + 2.000 &= 0 \\ x^2 - 70x + 1.000 &= 0 \\ (x - 50)(x - 20) &= 0, \end{aligned}$$

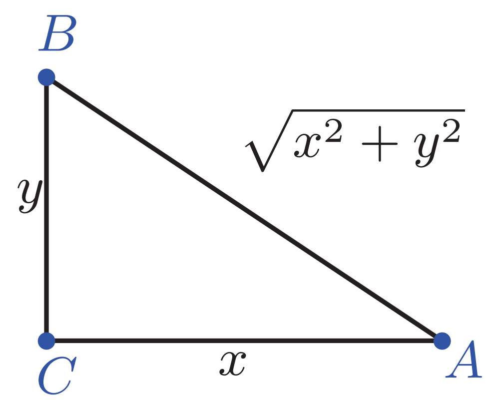
de donde $x_1 = 50$ o bien $x_2 = 20$, así se obtiene respectivamente $y_1 = 40$ e $y_2 = 100$, por lo tanto las dimensiones del terreno deben ser: 50 metros por 40 metros o bien 20 metros por 100 metros.

Problema 2

La suma de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo es 30 m. La suma de la de las medidas de sus catetos excede en 4 m a la medida de la hipotenusa. ¿Cuál es la medida de sus lados?

Solución:

Sean x e y las medidas de los catetos del triángulo, así por el Teorema de Pitágoras, la medida de la hipotenusa está dada por $\sqrt{x^2+y^2}$, como se muestra en la figura, de esta forma se tiene que,



$$\begin{aligned} x+y+\sqrt{x^2+y^2} &= 30 \\ x+y &= \sqrt{x^2+y^2}+4 \end{aligned}$$

ordenando, se obtiene el sistema

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 30$$
$$x + y - \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

al multiplicar la segunda ecuación por -1 y sumando ambas ecuaciones, se obtiene $2\sqrt{x^2 + y^2} = 26$, de modo que $\sqrt{x^2 + y^2} = 13$, es decir la medida de la hipotenusa es 13 m, y reemplazando este valor en el sistema original, este se reduce a

$$x + y + 13 = 30$$
$$x + y - 13 = 4,$$

es decir $x + y = 17$, de donde $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 289$.

Por otra parte, nuevamente por el Teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 169$, de modo que $169 + 2xy = 289$, y por lo tanto $2xy = 120$, esto es $xy = 60$, de esta manera, se tiene el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 17 \\ xy &= 60, \end{aligned}$$

de la primera ecuación se tiene que $y = 17 - x$ y reemplazando en la segunda ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} x(17 - x) &= 60 \\ x^2 - 17x + 60 &= 0 \\ (x - 5)(x - 12) &= 0 \end{aligned}$$

de donde $x = 5$ o bien $x = 12$. Por lo tanto los catetos miden 5 m, 12 m y la hipotenusa 13 m.

Problema 1: Represente gráficamente cada uno los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales y luego resuelva algebraicamente.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x + y = 5$$

$$2x + y = 4$$
$$x^2 + y = 7$$

Problema 2: La diagonal de un rectángulo mide 26 metros y el perímetro

68 metros. Determine la medida de sus lados.