Clase 2
Expresiones algebraicas

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2014

Recordemos que una expresión algebraica es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí mediante las operaciones aritméticas, es decir sumas, diferencias, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces.

Problema 1: En cada una de las siguientes expresiones, simplifique indicando qué condiciones deben satisfacer las constantes a, b, c y d de modo que sea posible simplificar.

1. $\dfrac{15a^3b^2}{5ab^2}$

   Solución: La expresión es válida solo si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, en tal caso, se tiene que

   $$\frac{15a^3b^2}{5ab^2} = \frac{15}{5}a^{3-1}b^{2-2} = 3a^2b^0 = 3a^2$$

2. $\dfrac{121a^4c^5d^7}{11ac^5d^8}$

   Solución: para $a \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ se tiene

   $$\frac{121a^4c^5d^7}{11ac^5d^8} = \frac{121}{11}a^{4-1}c^{5-5}d^{7-8} = 11a^3c^0d^{-1} = \frac{11a^3}{d}$$

Problema 2: Simplifique indicando las restricciones que sean necesarias.

1. $\dfrac{x^3+3x^2-10x}{x^3-4x^2+4x}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{x^3+3x^2-10x}{x^3-4x^2+4x} &= \frac{x\left(x^2+3x-10\right)}{x\left(x^2-4x+4\right)} \quad \text{si } x\neq 0,\\ &= \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)^2} \quad \text{y para } x\neq 2\\ &= \frac{x+5}{x-2}\end{aligned}$$

luego para $x\in\mathbb{R}-\{0,2\}$ se tiene que $\dfrac{x^3+3x^2-10x}{x^3-4x^2+4x}=\dfrac{x+5}{x-2}$

2. $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2}$

Solución: para $a \neq b-c$ y $a \neq c-b$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2} &= \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{(a-(b-c))(a+(b-c))}\\ &= \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)}\\ &= \frac{a-b-c}{a+b-c},\end{aligned}$$

así, siempre que $a \neq b-c$ y $a \neq c-b$, se tiene que

$$\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2} = \frac{a-b-c}{a+b-c}$$

Problema 3: Simplifique la expresión $\dfrac{ac-ad+bc-bd}{2c+3bc-2d-3bd}$, indicando las restricciones necesarias.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{ac-ad+bc-bd}{2c+3bc-2d-3bd} &= \frac{a\,(c-d)+b\,(c-d)}{2c-2d+3bc-3bd,} \qquad \text{para } c\neq d \text{ y } b\neq -\frac{2}{3}, \\ &= \frac{a\,(c-d)+b\,(c-d)}{2\,(c-d)+3b\,(c-d)} \\ &= \frac{(a+b)(c-d)}{(2+3b)(c-d)} \\ &= \frac{a+b}{2+3b}\end{aligned}$$

Problema 4: Verifique si $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=a+b$. Analice restricciones.

Solución: La expresión del lado izquierdo es válida solo si $a\neq 0$ y $b\neq 0$, en tal caso:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} &= \frac{\frac{b^2-a^2}{ab}}{\frac{a-b}{ab}}, \qquad \text{como } ab\neq 0, \text{ tenemos que} \\
&= \frac{b^2-a^2}{a-b} \\
&= \frac{(b-a)(b+a)}{a-b}, \qquad \text{si } a\neq b, \\
&= -(a+b)\neq a+b,
\end{aligned}$$

luego, como $a\neq b\neq 0$, no se cumple la igualdad.

Problema 5: Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ se cumple que

$$\frac{2\left(x^3+1\right)}{x+1} - \frac{x^3-1}{x-1} + \frac{x^3-x}{x^2-1} = (x-1)^2$$

Solución: Sea $E = \dfrac{2\left(x^3+1\right)}{x+1} - \dfrac{x^3-1}{x-1} + \dfrac{x^3-x}{x^2-1}$, factorizando se tiene que

$$\begin{aligned} E &= \frac{2(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1} - \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1} + \frac{x\left(x^2-1\right)}{x^2-1} \\ &= 2\left(x^2-x+1\right) - \left(x^2+x+1\right) + x \\ &= 2x^2 - 2x + 2 - x^2 - x - 1 + x \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x-1)^2, \end{aligned}$$

luego, la igualdad se cumple para todo $x \neq 1$ y $x \neq -1$.

Problema 6: Indique para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, la expresión $E(a)$ está definida y simplifique.

$$E(a) = \frac{\dfrac{3}{a-2} - \dfrac{2}{a-3}}{\dfrac{1}{a-3} - \dfrac{1}{a-2}},$$

Solución: La expresión $E(a)$ está definida para $a \neq 2$ y $a \neq 3$, en tal caso:

$$E(a) = \frac{\dfrac{3\,(a-3) - 2\,(a-2)}{(a-2)\,(a-3)}}{\dfrac{a-2-(a-3)}{(a-3)\,(a-2)}}$$

$$= \frac{3\,(a-3) - 2\,(a-2)}{a-2-(a-3)}$$

$$= \frac{3a-9-2a+4}{a-2-a+3} = a-5$$

Problema 7: Determine si la igualdad siguiente es verdadera o falsa. ¿Existe alguna restricción para los valores de a?, jutifique.

$$\frac{1}{a-\dfrac{a}{a-\dfrac{a^2}{a+1}}}=-1$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-\dfrac{a}{a-\dfrac{a^2}{a+1}}} &= \frac{1}{a-\dfrac{a}{\dfrac{a\,(a+1)-a^2}{a+1}}}\\
&= \frac{1}{a-\dfrac{a}{\left(\dfrac{a^2+a-a^2}{a+1}\right)}}\\
&= \frac{1}{a-\dfrac{a}{\dfrac{a}{a+1}}} = \frac{1}{a-(a+1)} = -1,
\end{aligned}$$

siempre que $a \neq -1$ y $a \neq 0$.

1. Simplifique la expresión $E(x) = \dfrac{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{x^2-1}}{1 + \dfrac{1}{x-1}}$

2. Simplifique la expresión $E(x) = \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1}\right) \div \left(x - \dfrac{1}{x+1}\right)$

3. Reduzca $\dfrac{a^2+1}{a} - \dfrac{2a^2-4a+2}{(a-1)^2}$, a la mínima expresión.

4. Demuestre que $\dfrac{\dfrac{9+6x+x^2}{9-x^2} \cdot \dfrac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\dfrac{2x-4}{\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{8}} \div \dfrac{2x^2-8x+8}{x-2}} = 1$