

Clase 9

Sistemas de ecuaciones no lineales

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2013

Problema 4: Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}|x| - y &= 3 \\ (x - 2)^2 + y &= 1\end{aligned}$$

Problema 4: Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}|x| - y &= 3 \\ (x - 2)^2 + y &= 1\end{aligned}$$

Solución: Al igual que en los ejemplos anteriores, ambas ecuaciones representan curvas en el plano y resolver el sistema equivale a encontrar (si existen) puntos de intersección entre ambas curvas.

Problema 4: Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}|x| - y &= 3 \\ (x - 2)^2 + y &= 1\end{aligned}$$

Solución: Al igual que en los ejemplos anteriores, ambas ecuaciones representan curvas en el plano y resolver el sistema equivale a encontrar (si existen) puntos de intersección entre ambas curvas.

Reescribiendo el sistema en la forma:

$$\begin{aligned}y &= |x| - 3 \\ y &= -(x - 2)^2 + 1,\end{aligned}$$

es posible observar que el problema consiste en determinar los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones f y g , donde

$$f(x) = |x| - 3 \tag{1}$$

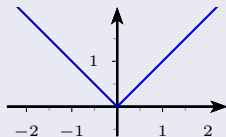
y

$$g(x) = -(x - 2)^2 + 1 \tag{2}$$

Recordar que

La función valor absoluto se define como

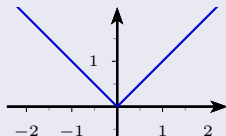
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Recordar que

La función valor absoluto se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

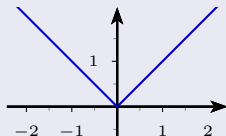


de modo que la gráfica de $f(x) = |x| - 3$, corresponde a la gráfica de la función valor absoluto, trasladada 3 unidades hacia abajo.

Recordar que

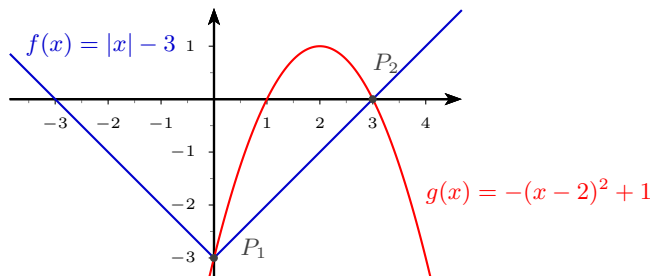
La función valor absoluto se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



de modo que la gráfica de $f(x) = |x| - 3$, corresponde a la gráfica de la función valor absoluto, trasladada 3 unidades hacia abajo.

La función $g(x) = -(x - 2)^2 + 1$ se puede expresar como $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ y por lo tanto su gráfica es una parábola que abre hacia abajo con vértice en el punto $(2, 1)$.



Gráficamente es claro que el sistema tiene solución, de hecho existen dos puntos de intersección $P_1(0, -3)$ y $P_2(3, 0)$, pero ¿cómo encontrar estas soluciones de forma algebraica?.

Dado que la definición de la función valor absoluto depende del signo de x , el sistema se resuelve primero para $x \geq 0$ y luego para $x < 0$.

Para $x < 0$: usando la definición del valor absoluto, se tiene que,
 $|x| = -x$ y por lo tanto el sistema se reduce a

$$\begin{aligned}y &= -x - 3 \\y &= -(x - 2)^2 + 1,\end{aligned}\tag{3}$$

sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned}-x - 3 &= -(x - 2)^2 + 1 \\-x - 3 &= -x^2 + 4x - 3 \\x^2 - 5x &= 0 \\x(x - 5) &= 0,\end{aligned}$$

luego $x = 0$ o bien $x = 5$, pero como en este caso x debe ser menor que cero, no existen soluciones del sistema con $x < 0$.

Para $x \geq 0$: usando la definición del valor absoluto, se tiene que, $|x| = x$ y por lo tanto el sistema se reduce a

$$\begin{aligned}y &= x - 3 \\ y &= -(x - 2)^2 + 1,\end{aligned}\tag{4}$$

sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned}x - 3 &= -(x - 2)^2 + 1 \\ x - 3 &= -x^2 + 4x - 3 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x - 3) &= 0,\end{aligned}$$

luego $x = 0$ o bien $x = 3$, de este modo reemplazando los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ en $y = x - 3$, se obtienen respectivamente, $y_1 = -3$ e $y_2 = 0$ y por lo tanto las soluciones son $(0, -3)$ y $(0, 3)$.

Problema 1

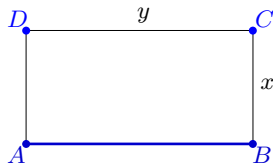
Se desea cercar un terreno rectangular que limita, en uno de sus lados, con un río. Si el área del terreno es de 2.000 m^2 y las longitudes de los tres lados a cercar suman 140 metros, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Problema 1

Se desea cercar un terreno rectangular que limita, en uno de sus lados, con un río. Si el área del terreno es de 2.000 m^2 y las longitudes de los tres lados a cercar suman 140 metros, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Solución: Sean x e y las medidas de los lados del terreno, como se indica en la figura.

Suponiendo que el lado AB corresponde a la orilla del río, el perímetro que se debe cercar está dado por $2x + y$, mientras que el área del terreno corresponde a $x \cdot y$.



Según el enunciado estas expresiones deben ser iguales a 140 y 2.000 respectivamente.

Por lo tanto, para conocer las dimensiones del terreno, basta resolver el sistema

$$2x + y = 140$$

$$xy = 2.000$$

De la primera ecuación se tiene que $y = 140 - 2x$, reemplazando en la segunda ecuación se obtiene:

$$x(140 - 2x) = 2.000$$

$$2x^2 - 140x + 2.000 = 0$$

$$x^2 - 70x + 1.000 = 0$$

$$(x - 50)(x - 20) = 0,$$

de donde $x_1 = 50$ o bien $x_2 = 20$, así se obtiene respectivamente $y_1 = 40$ e $y_2 = 100$, por lo tanto las dimensiones del terreno deben ser: 50 metros por 40 metros o bien 20 metros por 100 metros.

Problema 2

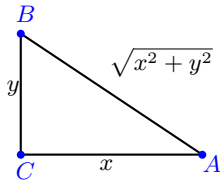
La suma de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo es 30 m . La suma de la de las medidas de sus catetos excede en 4 m a la medida de la hipotenusa. ¿Cuál es la medida de sus lados?

Problema 2

La suma de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo es 30 *m*. La suma de la de las medidas de sus catetos excede en 4 *m* a la medida de la hipotenusa. ¿Cuál es la medida de sus lados?

Solución:

Sean x e y las medidas de los catetos del triángulo, así por el Teorema de Pitágoras, la medida de la hipotenusa está dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$, como se muestra en la figura, de esta forma se tiene que,



$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 30$$

$$x + y = \sqrt{x^2 + y^2} + 4$$

ordenando, se tiene el sistema

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 30$$

$$x + y - \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

al multiplicar la segunda ecuación por -1 y sumando ambas ecuaciones, se obtiene $2\sqrt{x^2 + y^2} = 26$, de modo que $\sqrt{x^2 + y^2} = 13$, es decir la medida de la hipotenusa es 13 m , y reemplazando este valor en el sistema original, este se reduce a

$$x + y + 13 = 30$$

$$x + y - 13 = 4,$$

es decir $x + y = 17$, de donde $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 289$.

Por otra parte, nuevamente por el Teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 169$, de modo que $169 + 2xy = 289$, y por lo tanto $2xy = 120$, esto es $xy = 60$, de esta manera, se tiene el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 17 \\ xy &= 60,\end{aligned}$$

de la primera ecuación se tiene que $y = 17 - x$ y reemplazando en la segunda ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}x(17 - x) &= 60 \\ x^2 - 17x + 60 &= 0 \\ (x - 5)(x - 12) &= 0\end{aligned}$$

de donde $x = 5$ o bien $x = 12$. Por lo tanto los catetos miden 5 m, 12 m y la hipotenusa 13 m.

Problema 1: Represente gráficamente cada uno los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales y luego resuelva algebraicamente.

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x + y = 5$$

$$2x + y = 4$$

$$x^2 + y = 7$$

Problema 2: La diagonal de un rectángulo mide 26 metros y el perímetro 68 metros. Determine la medida de sus lados.