

Clase 8

Sistemas de ecuaciones no lineales

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2013

Sistemas de ecuaciones no lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal, se llama un sistema de ecuaciones no lineales.

Al igual que en un sistema de ecuaciones lineales, una solución del sistema es un par (x, y) que satisface ambas ecuaciones.

Geométricamente, cada ecuación representa una curva en el plano y el par ordenado (x, y) que es solución del sistema (en caso de existir), corresponde a el o los puntos de intersección de ambas curvas.

Problema 1: Considere el sistema

$$-4x + y = 1$$

$$xy = 3$$

Problema 1: Considere el sistema

$$-4x + y = 1$$

$$xy = 3$$

Solución: Cada ecuación del sistema representa una curva en el plano, en este caso,

Problema 1: Considere el sistema

$$-4x + y = 1$$

$$xy = 3$$

Solución: Cada ecuación del sistema representa una curva en el plano, en este caso,

- la primera ecuación corresponde a la función lineal $y = 4x + 1$ y por lo tanto representa una recta en el plano.

Problema 1: Considere el sistema

$$-4x + y = 1$$

$$xy = 3$$

Solución: Cada ecuación del sistema representa una curva en el plano, en este caso,

- la primera ecuación corresponde a la función lineal $y = 4x + 1$ y por lo tanto representa una recta en el plano.
- la segunda ecuación se puede expresar como la función racional $y = \frac{3}{x}$, cuya gráfica es una hipérbola.

Problema 1: Considere el sistema

$$-4x + y = 1$$

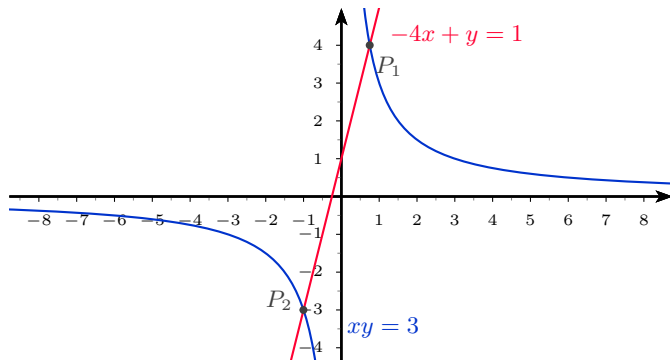
$$xy = 3$$

Solución: Cada ecuación del sistema representa una curva en el plano, en este caso,

- la primera ecuación corresponde a la función lineal $y = 4x + 1$ y por lo tanto representa una recta en el plano.
- la segunda ecuación se puede expresar como la función racional $y = \frac{3}{x}$, cuya gráfica es una hipérbola.

Antes de intentar resolver el sistema, es buena idea dibujar las curvas representadas por las ecuaciones de modo de saber a priori si existen soluciones del sistema (puntos en común en ambas gráficas) y en tal caso al menos intuir cuántas existen y dónde se ubican.

La siguiente figura muestra los puntos de intersección entre la recta $-4x + y = 1$ y la hipérbola $xy = 3$.



Se puede observar que las curvas se cortan en los puntos $P_1 \left(\frac{3}{4}, 4 \right)$ y $P_2(-1, -3)$ y por lo tanto, resolviendo algebraicamente, se debiesen obtener dos soluciones.

$$\begin{aligned}-4x + y &= 1 \\ xy &= 3,\end{aligned}$$

despejando y en la primera ecuación, se obtiene $y = 1 + 4x$ y sustituyendo en la segunda ecuación, se tiene que $x(1 + 4x) = 3$, es decir, se debe resolver la ecuación cuadrática $4x^2 + x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned}4x^2 + x - 3 &= 0 \\ (2x)^2 + \frac{1}{2}(2x) - 3 &= 0, \quad \text{factorizando,} \\ (2x + 2)(2x - 3/2) &= 0 \\ 4(x + 1)(x - 3/4) &= 0.\end{aligned}$$

así se obtienen las soluciones $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = -1$, de modo que reemplazando en $y = 1 + 4x$ se obtienen respectivamente $y_1 = 4$ e $y_2 = -3$, por lo tanto las soluciones al sistema son los pares ordenados $P_1\left(\frac{3}{4}, 4\right)$ y $P_2(-1, -3)$ tal como se observa en la gráfica.

Problema 2: Considere el sistema

$$3x^2 + y^2 = 4$$

$$x + y = 2.$$

Problema 2: Considere el sistema

$$\begin{aligned}3x^2 + y^2 &= 4 \\ x + y &= 2.\end{aligned}$$

Solución:

Reescribiendo la primera ecuación en la forma $\frac{x^2}{(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, notamos que ésta representa la elipse con centro en el origen y semieje mayor en el eje Y .

Problema 2: Considere el sistema

$$\begin{aligned}3x^2 + y^2 &= 4 \\ x + y &= 2.\end{aligned}$$

Solución:

Reescribiendo la primera ecuación en la forma $\frac{x^2}{(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, notamos que ésta representa la elipse con centro en el origen y semieje mayor en el eje Y .

La segunda ecuación representa la recta de pendiente -1 y coeficiente de posición 2 .

En esta situación, el sistema puede tener a lo más dos soluciones;

Problema 2: Considere el sistema

$$\begin{aligned}3x^2 + y^2 &= 4 \\ x + y &= 2.\end{aligned}$$

Solución:

Reescribiendo la primera ecuación en la forma $\frac{x^2}{(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, notamos que ésta representa la elipse con centro en el origen y semieje mayor en el eje Y .

La segunda ecuación representa la recta de pendiente -1 y coeficiente de posición 2.

En esta situación, el sistema puede tener a lo más dos soluciones;

- Si la recta no corta a la elipse el sistema no tiene solución.

Problema 2: Considere el sistema

$$\begin{aligned}3x^2 + y^2 &= 4 \\ x + y &= 2.\end{aligned}$$

Solución:

Reescribiendo la primera ecuación en la forma $\frac{x^2}{(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, notamos que ésta representa la elipse con centro en el origen y semieje mayor en el eje Y .

La segunda ecuación representa la recta de pendiente -1 y coeficiente de posición 2 .

En esta situación, el sistema puede tener a lo más dos soluciones;

- ❶ Si la recta no corta a la elipse el sistema no tiene solución.
- ❷ Si la recta es tangente a la elipse, el sistema tiene solución única.

Problema 2: Considere el sistema

$$\begin{aligned}3x^2 + y^2 &= 4 \\ x + y &= 2.\end{aligned}$$

Solución:

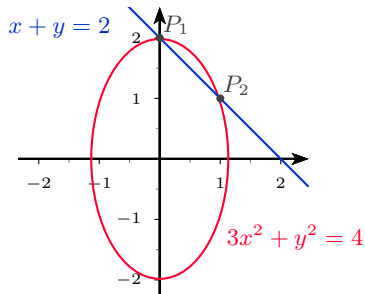
Reescribiendo la primera ecuación en la forma $\frac{x^2}{(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, notamos que ésta representa la elipse con centro en el origen y semieje mayor en el eje Y .

La segunda ecuación representa la recta de pendiente -1 y coeficiente de posición 2 .

En esta situación, el sistema puede tener a lo más dos soluciones;

- ❶ Si la recta no corta a la elipse el sistema no tiene solución.
- ❷ Si la recta es tangente a la elipse, el sistema tiene solución única.
- ❸ Finalmente si la recta es secante a la elipse, se tendrán dos soluciones.

Graficando ambas curvas, se observa que la recta corta a la elipse en dos puntos y por lo tanto el sistema tiene dos soluciones:



Resolviendo algebraicamente, se deben encontrar las soluciones: $P_1(0, 2)$ y $P_2(1, 1)$.

Despejando y de la segunda ecuación se tiene que $y = 2 - x$, reemplazando en la primera ecuación, se obtiene la ecuación de segundo grado

$$3x^2 + (2 - x)^2 = 4,$$

resolviendo el cuadrado de binomio y agrupando los términos al lado izquierdo de la ecuación, se obtiene:

$$4x^2 - 4x = 0, \quad \text{factorizando,}$$

$$4x(x - 1) = 0,$$

de donde se obtienen las soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ y reemplazando estos valores en $y = 2 - x$, se obtienen respectivamente $y_1 = 2$ e $y_2 = 1$, de modo que las soluciones del sistema son los pares ordenados $P_1(0, 2)$ y $P_2(1, 1)$, que corresponden a los puntos de intersección de la recta y la elipse, tal como se obtuvo en la resolución gráfica.

Problema 3: Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned}\log_2(x) - \log_2(y) &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 12\end{aligned}\tag{1}$$

Problema 3: Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned}\log_2(x) - \log_2(y) &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 12\end{aligned}\tag{1}$$

Solución: Es posible expresar la primera ecuación de manera más simple utilizando las siguientes propiedades de la función logaritmo

Propiedades de $f(x) = \log_a(x)$, $a > 1$

Propiedad 1 $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

Propiedad 2 $y = \log_a(x)$ si y solo si $a^y = x$

En este caso, usamos la Propiedad 1 para expresar la primera ecuación en la forma

$$\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 1,$$

y según la Propiedad 2, se tiene que

$$2^1 = \frac{x}{y}, \quad \text{o bien} \quad x = 2y$$

luego, el sistema (1) es equivalente a

$$\begin{aligned}x &= 2y \\ x^2 - y^2 &= 12,\end{aligned}$$

de modo que basta sustituir $x = 2y$ en la segunda ecuación para obtener:

$$\begin{aligned}(2y)^2 - y^2 &= 12 \\ 3y^2 - 12 &= 0 \\ 3(y^2 - 4) &= 0 \\ 3(y - 2)(y + 2) &= 0,\end{aligned}$$

de donde se obtienen las soluciones, $y_1 = 2$ e $y_2 = -2$, reemplazando en $x = 2y$ se obtienen respectivamente los valores $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$,

de este modo, el sistema tiene dos soluciones $P_1(4, 2)$ y $P_2(-4, -2)$, las que al igual que en los ejemplos anteriores corresponden a los puntos de intersección entre la recta $x = 2y$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 12$, tal como se aprecia en la siguiente gráfica.

