

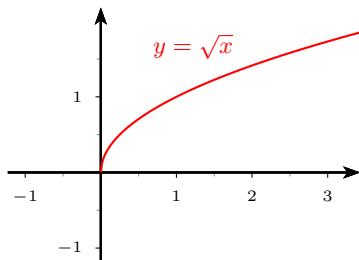
# Clase 5

## Ecuaciones irracionales y exponenciales

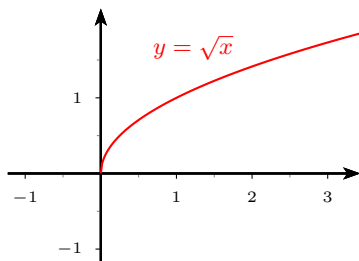
Instituto de Ciencias Básicas  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Diego Portales

Marzo, 2013

Gráfica de la función raíz cuadrada:  $f(x) = \sqrt{x}$



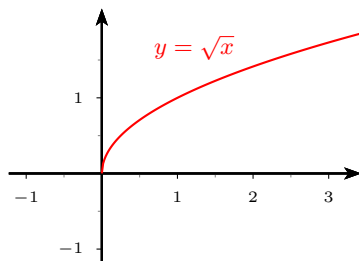
Gráfica de la función raíz cuadrada:  $f(x) = \sqrt{x}$



Observando la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x}$  es posible notar que:

- La función está definida solo para  $x \geq 0$ .

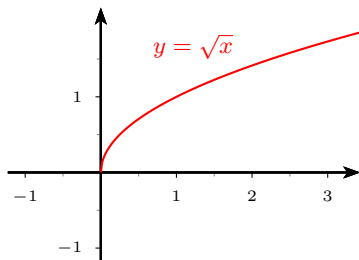
**Gráfica de la función raíz cuadrada:**  $f(x) = \sqrt{x}$



Observando la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x}$  es posible notar que:

- La función está definida solo para  $x \geq 0$ .
- $f(x) \geq 0$  para todo  $x \geq 0$ .

**Gráfica de la función raíz cuadrada:**  $f(x) = \sqrt{x}$



Observando la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x}$  es posible notar que:

- La función está definida solo para  $x \geq 0$ .
- $f(x) \geq 0$  para todo  $x \geq 0$ .
- $f$  es una función creciente.

**Problema 1:** Resuelva, para  $x \geq 0$ , la ecuación

$$5\sqrt{2} + 2\sqrt{3x} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2x}$$

**Problema 1:** Resuelva, para  $x \geq 0$ , la ecuación

$$5\sqrt{2} + 2\sqrt{3x} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2x}$$

**Solución:** Utilizando propiedades de raíces, tenemos:

$$\begin{aligned}5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\sqrt{x} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\sqrt{x} \\ (2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})\sqrt{x} &= 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} \\ \sqrt{x} &= 1,\end{aligned}$$

luego  $x = 1$ .

**Problema 2:** Resuelva la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+2}$$



**Problema 2:** Resuelva la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+2}$$

**Solución:** Asumiendo que  $x > -1$ , multiplicamos la igualdad por  $\sqrt{x+1}$ ,

$$\sqrt{(x+1)(x+2)} = x$$

$$x^2 + 3x + 2 = x^2$$

$$3x + 2 = 0.$$

Por tanto,  $x = -\frac{2}{3}$ , pero este resultado no satisface la ecuación original, luego, el problema no tiene solución.

**Problema 3:** Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x+1} + \frac{9}{\sqrt{x+1}} = 6$$

**Problema 3:** Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x+1} + \frac{9}{\sqrt{x+1}} = 6$$

**Solución :** Asumiendo que  $x > -1$ , tenemos:

$$\sqrt{(x+1)^2 + 9} = 6\sqrt{x+1}$$

$$x+1+9 = 6\sqrt{x+1}$$

$$6\sqrt{x+1} = x+10$$

$$36(x+1) = x^2 + 20x + 100$$

$$x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$(x-8)^2 = 0$$

$$x = 8,$$

luego, la única solución al problema es  $x = 8$ .

**Problema 4:** Resuelva la ecuación

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2$$

**Problema 4:** Resuelva la ecuación

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2$$

**Solución :** Observemos que para que la ecuación tenga sentido,  $x \geq 0$ .  
Elevando al cubo, tenemos:

$$1 + \sqrt{x} = 8$$

$$\sqrt{x} = 7$$

$$x = 49,$$

luego,  $x = 49$ .

**Problema 5:** Resuelva la ecuación

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2x} \text{ , para } a \in \mathbb{R}$$

indicando las restricciones que tiene el problema.

**Problema 5:** Resuelva la ecuación

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2x}, \text{ para } a \in \mathbb{R}$$

indicando las restricciones que tiene el problema.

**Solución:**

Para que la ecuación tenga sentido debe cumplirse que  $-a \leq x \leq a$ .

Elevando al cuadrado, tenemos:

$$a + x + 2\sqrt{a^2 - x^2} + a - x = 2x$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = x - a$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = x^2 - 2ax + a^2$$

$$x(x - a) = 0.$$

Por tanto,  $x = 0$  o  $x = a$ , luego la única solución es  $x = a$ . ¿Esto es para cada  $a \in \mathbb{R}$ ?

**Problema 6:** Resuelva de forma algebraica y gráficamente la ecuación

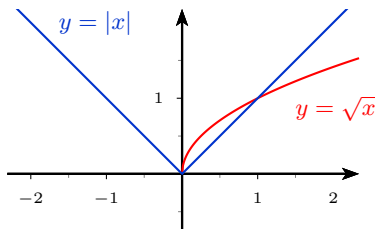
$$\sqrt{x} = |x|$$



**Problema 6:** Resuelva de forma algebraica y gráficamente la ecuación

$$\sqrt{x} = |x|$$

**Solución:** Graficando las curvas  $y = \sqrt{x}$  e  $y = |x|$ ,



observamos que las gráficas se cortan en dos puntos:  $(0,0)$  y  $(1,1)$ , de modo que existen dos soluciones de la ecuación:  $x = 0$  y  $x = 1$ .

Como  $\sqrt{x}$  está definida solo para  $x \geq 0$ , asumimos que  $x$  es no negativo, y bajo este supuesto la ecuación queda

$$\sqrt{x} = x$$

$$\sqrt{x} - x = 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = 0,$$

luego  $\sqrt{x} = 0$  o bien  $\sqrt{x} = 1$ , de donde se obtienen las soluciones,  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Problema 1:** Resuelva las siguientes ecuaciones

a)  $\sqrt{x-3} = \sqrt{x} - 3$

b)  $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$

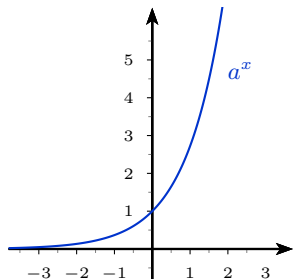
c)  $2 + 7\sqrt{x^3} = 9 + \sqrt[4]{x^3}$

d)  $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 3 + \frac{\sqrt{x}+1}{2}$

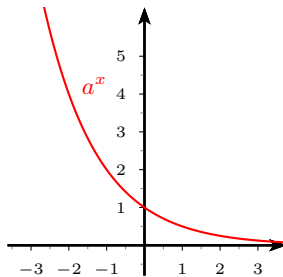
# Función exponencial

Recuerde que el gráfico de  $f(x) = a^x$ , con  $a > 0$  está dado por

$$f(x) = a^x \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = a^x, \text{ con } 0 < a < 1.$$



## Observación

La función exponencial es una función inyectiva, esto es,

$$a^x = a^y \iff x = y$$

**Problema 1:** Resuelva la ecuación

$$3^{x^2-5} = 81.$$

**Problema 1:** Resuelva la ecuación

$$3^{x^2-5} = 81.$$

**Solución:**

$$3^{x^2-5} = 81$$

$$3^{x^2-5} = 3^4$$

$$x^2 - 5 = 4$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3,$$

por tanto, la solución es  $x = \pm 3$ .

**Problema 2:** Resuelva la ecuación

$$\sqrt[3]{b^{2x+3}} = 1,$$

indicando las restricciones de  $b$ .

**Problema 2:** Resuelva la ecuación

$$\sqrt[3x]{b^{2x+3}} = 1,$$

indicando las restricciones de  $b$ .

**Solución:**

$$\sqrt[3x]{b^{2x+3}} = 1$$

$$\sqrt[3x]{b^{2x+3}} = b^0, \text{ con } b \neq 0$$

$$b^{\frac{2x+3}{3x}} = b^0$$

$$\frac{2x+3}{3x} = 0.$$

Si  $x \neq 0$ , entonces  $2x+3=0$ , o bien,  $x = -3/2$ .



**Problema 3:** Resuelva la ecuación

$$2^x \cdot 5^{x+1} = \frac{0.5}{10^{-8}}$$

**Problema 3:** Resuelva la ecuación

$$2^x \cdot 5^{x+1} = \frac{0.5}{10^{-8}}$$

**Solución:**

$$2^x \cdot 5^x \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 10^8$$

$$10^x = \frac{10^8}{10}$$

$$10^x = 10^7$$

$$x = 7,$$

por tanto,  $x = 7$ .

**Problema 4:** Resuelva la ecuación

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 39$$

usando la variable auxiliar  $u = 3^x$ .

**Problema 4:** Resuelva la ecuación

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 39$$

usando la variable auxiliar  $u = 3^x$ .

**Solución:**

Por propiedades de potencias,

$$3^x + 3 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^x = 39.$$

Sea  $u = 3^x$ , entonces,

$$u + 3u + 9u = 39$$

$$13u = 39$$

$$u = 3,$$

volviendo a la variable original, tenemos  $3^x = 3$ , o bien,  $x = 1$ .

**Problema 5:** Resuelva la ecuación

$$\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{7x-1} \cdot 3^{18x+21}}{27^{2x+1}} = 1$$

**Problema 5:** Resuelva la ecuación

$$\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{7x-1} \cdot 3^{18x+21}}{27^{2x+1}} = 1$$

**Solución:**

$$(3^{-2})^{7x-1} \cdot 3^{18x+21} = (3^3)^{2x+1}$$

$$3^{-14x+2} \cdot 3^{18x+21} = 3^{6x+3}$$

$$4x + 23 = 6x + 3$$

$$-2x = -20$$

$$x = 10.$$

**Problema 5:** Resuelva la ecuación

$$\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{7x-1} \cdot 3^{18x+21}}{27^{2x+1}} = 1$$

**Solución:**

$$(3^{-2})^{7x-1} \cdot 3^{18x+21} = (3^3)^{2x+1}$$

$$3^{-14x+2} \cdot 3^{18x+21} = 3^{6x+3}$$

$$4x + 23 = 6x + 3$$

$$-2x = -20$$

$$x = 10.$$

**Observación**

¿ Qué sucede si se utiliza  $3^0 = 1$  inicialmente ?.

**Problema 6:** Resuelva la ecuación

$$10^x \cdot 5^{x+6} = 2$$



**Problema 6:** Resuelva la ecuación

$$10^x \cdot 5^{x+6} = 2$$

**Solución:**

$$2^x \cdot 5^x \cdot 5^{5x+6} = 2$$

$$5^{2x+6} = 2^{1-x},$$

aplicando logaritmo en base 10 a la igualdad, tenemos:

$$(2x + 6) \log 5 = (1 - x) \log 2$$

$$2x \log 5 + 6 \log 5 = \log 2 - x \log 2$$

$$x(2 \log 5 + \log 2) = \log 2 - 6 \log 5$$

$$x = \frac{\log 2 - 6 \log 5}{2 \log 5 + \log 2}$$