

Clase 1

Números Reales

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Muchas veces, en actividades cotidianas, es necesario dar respuesta a preguntas relacionadas con números, por ejemplo;

- ¿cuántos jugadores se necesitan para jugar un partido de fútbol?
- ¿cuánta madejas de lana hay que tener para tejer un chaleco?
- ¿cuánto debo recorrer para ir de Viña del Mar a Santiago?, etc.

Muchas veces, en actividades cotidianas, es necesario dar respuesta a preguntas relacionadas con números, por ejemplo;

- ¿cuántos jugadores se necesitan para jugar un partido de fútbol?
- ¿cuánta madejas de lana hay que tener para tejer un chaleco?
- ¿cuánto debo recorrer para ir de Viña del Mar a Santiago?, etc.

A veces esas preguntas se pueden responder solamente en algún conjunto numérico específico:

- 11 jugadores,
- 3,5 madejas de lana,
- 120 Kilómetros, etc

Algunos de estos problemas se pueden resolver mentalmente, aunque siempre es bueno hacer un procedimiento escrito.

Algunos problemas básicos son los siguientes:

- Si en cada caja entran 8 huevos. ¿Cuántas cajas se necesitan, como mínimo, para colocar 51 huevos?
- Una bacteria se reproduce de manera tal que cada una hora, la cantidad de bacterias existentes es 10 veces mayor que la hora anterior. ¿Cuántas bacterias hay al cabo de 4 horas?
- Juan tiene como tarea escribir una serie de números menores que 55, a partir de 0, y de 5 en 5. El último que escribió es 53, ¿cometió algún error?

Números Naturales

Los números naturales son aquellos que sirven para designar la cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto.

Los números naturales son infinitos, el conjunto de todos ellos se denota por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Números Naturales

Los números naturales son aquellos que sirven para designar la cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto.

Los números naturales son infinitos, el conjunto de todos ellos se denota por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Problema 1: ¿Todo número distinto de cero, tiene infinitos múltiplos?

Números Naturales

Los números naturales son aquellos que sirven para designar la cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto.

Los números naturales son infinitos, el conjunto de todos ellos se denota por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Problema 1: ¿Todo número distinto de cero, tiene infinitos múltiplos?

Problema 2 Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- 1 Un número es primo si y sólo si es divisible por sí mismo.
- 2 Todos los números pares son compuestos.
- 3 El producto de dos números primos es un número compuesto.
- 4 La suma de dos números primos siempre es número primo.

Problema 3 Si k es un número impar, entonces ¿cuál de las siguientes expresiones NO representa un número par?

- a) $k + 1$,
- b) $k(k + 1)$,
- c) $3k + 1$,
- d) $3k + k^3$,
- e) $k^2 - 2$.

Problema 3 Si k es un número impar, entonces ¿cuál de las siguientes expresiones NO representa un número par?

- a) $k + 1$,
- b) $k(k + 1)$,
- c) $3k + 1$,
- d) $3k + k^3$,
- e) $k^2 - 2$.

Problema 4 Un ratón corre dando saltos de 30 cm, perseguido por un gato que da saltos de 45 cm. ¿Cada cuántos centímetros coinciden las huellas del gato y las del ratón?

Problema 3 Si k es un número impar, entonces ¿cuál de las siguientes expresiones NO representa un número par?

- a) $k + 1$,
- b) $k(k + 1)$,
- c) $3k + 1$,
- d) $3k + k^3$,
- e) $k^2 - 2$.

Problema 4 Un ratón corre dando saltos de 30 cm, perseguido por un gato que da saltos de 45 cm. ¿Cada cuántos centímetros coinciden las huellas del gato y las del ratón?

Solución:

El ratón tiene la siguiente secuencia: 30, 60, 90, 120, 150, 180, ...

y el gato: 45, 90, 135, 180, 225, ... se encuentran cada 90 cm, siempre que el gato no se coma al ratón...

Problema 5: Traduzca a lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

- ❶ El antecesor de n es ...
- ❷ El cuádruplo de un número n más dos es ...
- ❸ La tercera parte de un número n menos cinco es ...
- ❹ El cuádruplo de un número n es ...
- ❺ El doble de un número n menos cuatro unidades es ...

Números enteros

El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, sus inversos aditivos y el cero, este conjunto se denota por

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$$

Números enteros

El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, sus inversos aditivos y el cero, este conjunto se denota por

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$$

Ejemplo: Si a las 8 de la mañana el termómetro marcaba cinco grados bajo cero; a las 12 del mediodía, la temperatura había subido ocho grados y ahora, a las 12 de la noche, ha vuelto a bajar cinco grados, ¿qué temperatura marca ahora el termómetro?

Números enteros

El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, sus inversos aditivos y el cero, este conjunto se denota por

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$$

Ejemplo: Si a las 8 de la mañana el termómetro marcaba cinco grados bajo cero; a las 12 del mediodía, la temperatura había subido ocho grados y ahora, a las 12 de la noche, ha vuelto a bajar cinco grados, ¿qué temperatura marca ahora el termómetro?

Solución: Ordenando los datos,

- 8 AM : -5°C
- 12 AM : $(-5^{\circ}\text{C}) + 8^{\circ}\text{C} = 3^{\circ}\text{C}$
- 12 PM : $3^{\circ}\text{C} - 5^{\circ}\text{C} = -2^{\circ}\text{C}$

Por lo tanto a las 12 de la noche, la temperatura es de 2 grados bajo cero.

Problema 1: Determine el valor de la expresión

$$S = (-7)(1) - \{(-5) + (-2) - (-3)\}(-2)$$

Problema 1: Determine el valor de la expresión

$$S = (-7)(1) - \{(-5) + (-2) - (-3)\}(-2)$$

Solución: Aplicando orden de resolución

$$\begin{aligned} S &= (-7)(1) - \{-5 - 2 + 3\}(-2) \\ &= -7 - (-4)(-2) \\ &= -7 - 8 \\ &= -15 \end{aligned}$$

Números racionales

El conjunto de los números racionales consiste de todos los números que pueden ser escritos de la forma $\frac{p}{q}$, siendo p y q números enteros y $q \neq 0$, es decir:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Números racionales

El conjunto de los números racionales consiste de todos los números que pueden ser escritos de la forma $\frac{p}{q}$, siendo p y q números enteros y $q \neq 0$, es decir:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Ejemplo: Encuentre el valor de $S = \frac{5}{8} \div \left(\frac{17}{4} - 3 \left(2 - \frac{2}{3} \right) \right)$

Números racionales

El conjunto de los números racionales consiste de todos los números que pueden ser escritos de la forma $\frac{p}{q}$, siendo p y q números enteros y $q \neq 0$, es decir:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Ejemplo: Encuentre el valor de $S = \frac{5}{8} \div \left(\frac{17}{4} - 3 \left(2 - \frac{2}{3} \right) \right)$

Solución: Resolviendo primero el paréntesis interior:

$$\begin{aligned} S &= \frac{5}{8} \div \left(\frac{17}{4} - 3 \left(\frac{4}{3} \right) \right) \\ &= \frac{5}{8} \div \left(\frac{17}{4} - 4 \right) \\ &= \frac{5}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Problema 1: Determine el valor de $S = \left(\frac{1}{6} - 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right)$

Problema 1: Determine el valor de $S = \left(\frac{1}{6} - 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{6} - \frac{7}{3} + \frac{10}{3}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{14}{6} + \frac{20}{6}\right) - \left(\frac{6}{4} - \frac{7}{4}\right) \\ &= \frac{7}{6} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{14}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

Problema 2: Ordene de menor a mayor, los números: $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{20}{30}$.

Problema 2: Ordene de menor a mayor, los números: $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{20}{30}$.

Solución: Buscamos el mínimo común múltiplo entre los denominadores:

$$m.c.m(5, 10, 15, 30) = 30$$

y se amplifica cada fracción, de modo de igualar los denominadores

$$\frac{2}{5} = \frac{12}{30}, \quad \frac{6}{10} = \frac{18}{30}, \quad \frac{7}{15} = \frac{14}{30}, \quad \frac{20}{30}$$

de modo que los nuevos números son

$$\frac{12}{30}, \quad \frac{18}{30}, \quad \frac{14}{30}, \quad \frac{20}{30}$$

y por lo tanto el orden pedido es

$$\frac{2}{5} < \frac{7}{15} < \frac{6}{10} < \frac{20}{30}$$

Problema 3: Un comerciante compra 225 sacos de café de 45 kg cada saco y los envasa en bolsas de 250 g, ¿cuánto ingresará si vende la mercancía a 2.000 pesos la bolsa?

Problema 3: Un comerciante compra 225 sacos de café de 45 kg cada saco y los envasa en bolsas de 250 g, ¿cuánto ingresará si vende la mercancía a 2.000 pesos la bolsa?

Solución: La cantidad de kilos de café es $225 \cdot 45 = 10.125$ kg, dividiendo

este monto por 250 obtenemos la cantidad de bolsas: $\frac{10.125}{250} = \frac{81}{2}$

como vende cada bolsa a 2.000 pesos, entonces se tiene un total de

$$\frac{81}{2} \cdot 2.000 = 81.000 \text{ pesos.}$$

Problema 4: Pedro tenía \$18.000 y ha gastado las cuatro décimas partes en libros, dos quintos en películas y un décimo en revistas. ¿Qué fracción de su dinero ha gastado?, ¿cuánto dinero le queda?

Problema 4: Pedro tenía \$18.000 y ha gastado las cuatro décimas partes en libros, dos quintos en películas y un décimo en revistas. ¿Qué fracción de su dinero ha gastado?, ¿cuánto dinero le queda?

Solución: El dinero se ha gastado en lo siguiente:

- en libros, $\frac{4}{10} \cdot 18.000 = 7.200$, es decir \$7.200,
- en películas, $\frac{2}{5} \cdot 18.000 = 7.200$, es decir \$7.200,
- en revistas, $\frac{1}{10} \cdot 18.000 = 1.800$, es decir \$1.800.

Sumando estos montos se tiene

$$\$7.200 + \$7.200 + \$1.800 = \$16.200,$$

de modo que el dinero que queda es $\$18.000 - \$16.200 = \$1.800$.

Por lo tanto, fracción que le queda es $\frac{1.800}{18.000} = \frac{1}{10}$, es decir un décimo.

Problema 1: Determine el valor de las siguientes expresiones:

a) $-7 - [3 - (10 - 6) - (6 - 3)]$

b) $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) \div \left(\left(3 + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{16}{13}\right)$

Problema 1: Determine el valor de las siguientes expresiones:

a) $-7 - [3 - (10 - 6) - (6 - 3)]$

b) $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) \div \left(\left(3 + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{16}{13}\right)$

Problema 2: Me compré un libro por \$4, un par de zapatos por \$2 menos que el libro, un lápiz por la mitad de lo que me costaron el libro y los zapatos. ¿Cuánto me sobrará después de hacer estos pagos, si inicialmente tenía \$16?

Problema 3 En una carrera de bicicletas, uno de los ciclistas tarda 16 min. en recorrer $\frac{4}{5}$ del circuito y el otro invierte 14 min. en recorrer $\frac{2}{3}$ del mismo circuito. ¿Cuál de los ciclistas gana la carrera?

Números irracionales

Los números irracionales son todos aquellos números que no pertenecen al conjunto de los números racionales, es decir, aquellos que no pueden ser expresados como fracción.

Algunos números irracionales son: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e , π , $\ln(2)$, etc.

Números irracionales

Los números irracionales son todos aquellos números que no pertenecen al conjunto de los números racionales, es decir, aquellos que no pueden ser expresados como fracción.

Algunos números irracionales son: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e , π , $\ln(2)$, etc.

Ejemplo: Demuestre que $\sqrt{2}$ **no** es un número racional.

Números irracionales

Los números irracionales son todos aquellos números que no pertenecen al conjunto de los números racionales, es decir, aquellos que no pueden ser expresados como fracción.

Algunos números irracionales son: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e , π , $\ln(2)$, etc.

Ejemplo: Demuestre que $\sqrt{2}$ **no** es un número racional.

Demostración: Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, es decir que se puede escribir de la forma

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

donde a, b son números enteros no nulos, y tales que el único divisor común entre ellos es el 1, esto es, la fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible (no se puede simplificar).

de esta manera se tiene que su cuadrado es $2 = \frac{a^2}{b^2}$ y entonces $a^2 = 2b^2$, es decir a^2 es un número par y por lo tanto a es par, es decir a es de la forma $a = 2n$ para $n \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{4n^2}{b^2},$$

esto obliga a que b^2 sea par y por lo tanto b es par, es decir b es de la forma $b = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto

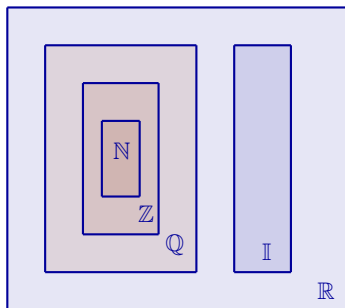
$$\frac{a}{b} = \frac{2n}{2k}$$

lo que contradice el que a y b no tienen divisores comunes. La contradicción provino de suponer que $\sqrt{2}$ se puede escribir como fracción, luego $\sqrt{2}$ no es racional.

Números reales

El conjunto de los números reales, que es la unión de todos los conjuntos antes vistos, es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, donde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

La relación de contención de estos conjuntos se puede representar de la siguiente manera:



Potencias

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define la potencia n -ésima de a , como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

Si $a \neq 0$, se define $a^{-1} = \frac{1}{a}$ y por lo tanto $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Revisemos algunos ejemplos:

● Determine el valor de $A = \frac{27^{-3} \cdot 9^{-8}}{3^{-10}}$

Potencias

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define la potencia n -ésima de a , como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

Si $a \neq 0$, se define $a^{-1} = \frac{1}{a}$ y por lo tanto $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Revisemos algunos ejemplos:

- 1 Determine el valor de $A = \frac{27^{-3} \cdot 9^{-8}}{3^{-10}}$
- 2 Obtenga el valor de $B = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot 9^7$

Potencias

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define la potencia n -ésima de a , como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

Si $a \neq 0$, se define $a^{-1} = \frac{1}{a}$ y por lo tanto $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Revisemos algunos ejemplos:

- 1 Determine el valor de $A = \frac{27^{-3} \cdot 9^{-8}}{3^{-10}}$
- 2 Obtenga el valor de $B = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot 9^7$
- 3 Reduzca $\left[1 \div \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-2} + 10 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2^{-2} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right)$, a la mínima expresión.

Problema 1: En cada una de las siguientes expresiones, descubra dónde está el error.

a) $-5^2 + 1 = 26$,

b) $(3 - \pi)^2 = 9 - \pi^2$,

c) $4 \cdot 3^2 144$,

d) $3^2 + 4^2 = 7^2$,

e) $4^2 - 3^2 = 25$.

Las raíces son un caso muy especial de potencias, ya que son potencias con exponente fraccionario.

Raíces

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se define la raíz n -ésima de a como $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, de modo que

$$\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$$

Observación: El número natural n se llama índice, y el número real a recibe el nombre de cantidad subradical.

Las raíces son un caso muy especial de potencias, ya que son potencias con exponente fraccionario.

Raíces

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se define la raíz n -ésima de a como $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, de modo que

$$\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$$

Observación: El número natural n se llama índice, y el número real a recibe el nombre de cantidad subradical.

Observe que si n es par, entonces a debe ser mayor que cero. ¿Por qué?

Problema 1: Ordene de menor a mayor los siguientes radicales $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[5]{2}$.

Problema 1: Ordene de menor a mayor los siguientes radicales $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[5]{2}$.

Solución: Para igualar el índice, se calcula el mínimo común múltiplo entre ellos, es decir, $m.c.m(3, 5) = 15$

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[15]{7^5}$$

$$\sqrt[5]{4} = \sqrt[15]{4^3}$$

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^3}$$

con esto comparamos 7^5 , 4^3 , 2^3 , de donde el orden de los valores iniciales es $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[3]{7}$.

Problema 2 Determine el valor exacto de

a) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64}$

Problema 2 Determine el valor exacto de

a) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64}$

Solución: $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{64} = 4 \cdot 7 \cdot 8 = 224.$

Problema 2 Determine el valor exacto de

a) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64}$

Solución: $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{64} = 4 \cdot 7 \cdot 8 = 224.$

b) $\sqrt[5]{-32 \cdot 243}$

Problema 2 Determine el valor exacto de

a) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64}$

Solución: $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{64} = 4 \cdot 7 \cdot 8 = 224.$

b) $\sqrt[5]{-32 \cdot 243}$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{-32 \cdot 243} &= \sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[5]{243} \\ &= \sqrt[5]{(-2)^5} \cdot \sqrt[5]{(3)^5} \\ &= (-2)(3) = -6\end{aligned}$$

Problema 1: ¿Existe algún impedimento para calcular el valor exacto de la expresión $\sqrt{(-16) \cdot (-36)}$?

Problema 2: Encuentre el valor de la expresión:

$$E = \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + 3^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)$$

Problema 3: Siendo $A = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$ y $B = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$, determine $A + B$ y AB .

Problema 4 Simplifique las expresiones:

a) $\frac{2 - 2\sqrt{2}}{2},$

b) $\frac{3\sqrt{27} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Problema 5: Racionalice las expresiones:

a) $\frac{3}{\sqrt{2} - 1},$

b) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}}$

Problema 6: Dados los números $a = 5 + 2\sqrt{2}$, $b = 5 - 2\sqrt{2}$, pruebe que $(a + b)$ y $(a^2 + b^2)$ son números enteros.

Problema 7: Determine cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

b) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

c) $\sqrt{9m+9n} = 3\sqrt{m+n}$,

d) $\sqrt{m} + \sqrt{m} = 2\sqrt{m}$,

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{2x}$.

Problema 8: Simplifique la expresión:

$$E = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{12}} + \left(\frac{1 - \frac{1}{3}}{(-1)^3}\right)^2$$