

Clase 4

Ecuaciones lineales y cuadráticas

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo de 2013

Muchos de los errores que los estudiantes cometen en Matemática no se deben al tema que se está desarrollando, sino a carencias de conocimientos previos que se trasladan a los nuevos contenidos abordados.

En el caso específico de las ecuaciones, son generadores de errores el desconocer propiedades de:

- Las potencias: operaciones con potencias de igual base o de igual exponente, potencias con un signo menos antepuesto, potencias con exponente negativo o fracción.
- Las raíces: sumas, productos y cuocientes de raíces, raíces de índice impar y radicando negativo, extracción de factores de una expresión irracional.
- Los logaritmos: el concepto mismo, existencia de logaritmos, valores que puede alcanzar la base de un logaritmo, propiedades relativas a sumas, productos y cuocientes.

A lo anterior, hay que agregar la aplicación de procedimientos imperfectos y técnicas o rutinas sin fundamento teórico, para resolver algunas situaciones. Por ejemplo, la falta de análisis al aplicar las propiedades de la igualdad (“Regla del pasa”: está multiplicando, pasa diviendo), multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucra la variable, elevar ambos miembros de la ecuación a un mismo exponente, son prácticas conducentes a error.

Problema 1: Resuelva la ecuación

$$\frac{4}{3}(x + 8) = \frac{3}{4}(2x + 12)$$

Problema 1: Resuelva la ecuación

$$\frac{4}{3}(x + 8) = \frac{3}{4}(2x + 12)$$

Solución:

$$16(x + 8) = 9(2x + 12)$$

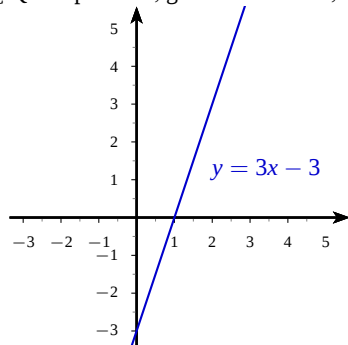
$$16x + 128 = 18x + 108$$

$$-2x = -20$$

$$x = 10$$

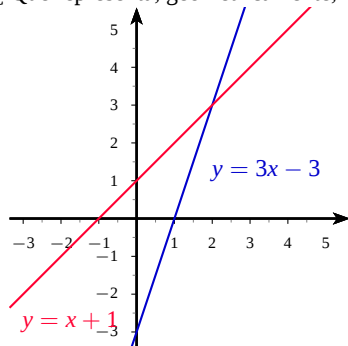
¿ Qué representa, geométricamente, la solución de la ecuación $3x - 3 = x + 1$?

¿ Qué representa, geométicamente, la solución de la ecuación $3x - 3 = x + 1$?



Notamos que:

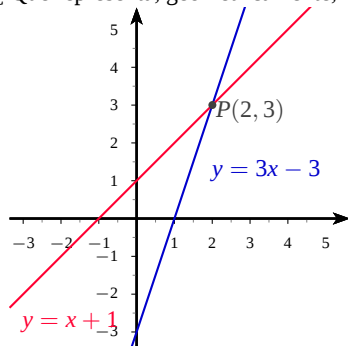
¿ Qué representa, geométicamente, la solución de la ecuación $3x - 3 = x + 1$?



Notamos que:

- El lado izquierdo de la ecuación representa la recta $y = 3x - 3$

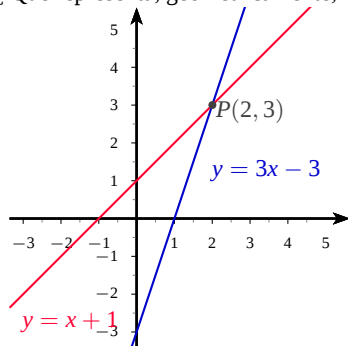
¿ Qué representa, geométicamente, la solución de la ecuación $3x - 3 = x + 1$?



Notamos que:

- El lado izquierdo de la ecuación representa la recta $y = 3x - 3$
- El lado derecho de la ecuación representa la recta $y = x + 1$

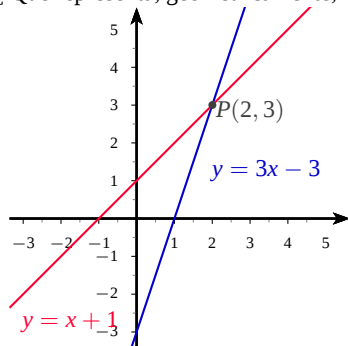
¿ Qué representa, geométicamente, la solución de la ecuación $3x - 3 = x + 1$?



Notamos que:

- El lado izquierdo de la ecuación representa la recta $y = 3x - 3$
- El lado derecho de la ecuación representa la recta $y = x + 1$
- Resolviendo algebraicamente la ecuación, obtenemos la solución $x = 2$.

¿ Qué representa, geométicamente, la solución de la ecuación $3x - 3 = x + 1$?

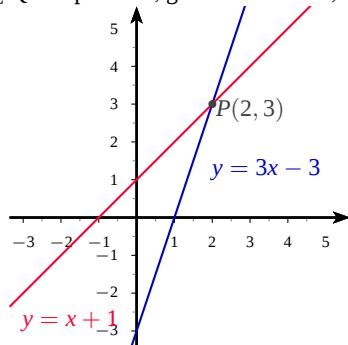


Notamos que:

- El lado izquierdo de la ecuación representa la recta $y = 3x - 3$
- El lado derecho de la ecuación representa la recta $y = x + 1$
- Resolviendo algebraicamente la ecuación, obtenemos la solución $x = 2$.

La solución corresponde a la primera coordenada del punto de intersección entre ambas rectas.

¿ Qué representa, geométicamente, la solución de la ecuación $3x - 3 = x + 1$?



Notamos que:

- El lado izquierdo de la ecuación representa la recta $y = 3x - 3$
- El lado derecho de la ecuación representa la recta $y = x + 1$
- Resolviendo algebraicamente la ecuación, obtenemos la solución $x = 2$.

La solución corresponde a la primera coordenada del punto de intersección entre ambas rectas.

Observación

¿Cuál es la solución de $3x - 3 < x + 1$?

Problema 2: Resuelva la ecuación

$$2 - \left[-2(x + 1) - \frac{x - 3}{2} \right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

Problema 2: Resuelva la ecuación

$$2 - \left[-2(x + 1) - \frac{x - 3}{2} \right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x$$

Solución :

$$\begin{aligned} 2 + 2(x + 1) + \frac{x - 3}{2} &= \frac{2x}{3} - \frac{5x - 3}{12} + 3x \\ 24 + 24(x + 1) + 6(x - 3) &= 8x - (5x - 3) + 36x \\ -9x &= -27 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Problema 3: Resuelva x en la ecuación

$$\frac{3(a-x)}{b} - \frac{2(b-x)}{a} = \frac{2b^2 - 6a^2}{ab} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Problema 3: Resuelva x en la ecuación

$$\frac{3(a-x)}{b} - \frac{2(b-x)}{a} = \frac{2b^2 - 6a^2}{ab} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Solución :

$$3a(a-x) - 2b(b-x) = 2b^2 - 6a^2$$

$$3a^2 - 3ax - 2b^2 + 2bx = 2b^2 - 6a^2$$

$$-(3a - 2b)x = 4b^2 - 9a^2$$

$$x = -\frac{(2b - 3a)(2b + 3a)}{3a - 2b}$$

$$x = 3a + 2b, \text{ siempre que } a \neq \frac{2}{3}b.$$

Problema 3: Resuelva x en la ecuación

$$\frac{3(a-x)}{b} - \frac{2(b-x)}{a} = \frac{2b^2 - 6a^2}{ab} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Solución :

$$3a(a-x) - 2b(b-x) = 2b^2 - 6a^2$$

$$3a^2 - 3ax - 2b^2 + 2bx = 2b^2 - 6a^2$$

$$-(3a - 2b)x = 4b^2 - 9a^2$$

$$x = -\frac{(2b - 3a)(2b + 3a)}{3a - 2b}$$

$$x = 3a + 2b, \text{ siempre que } a \neq \frac{2}{3}b.$$

Observación

¿Cuál es el recíproco de la afirmación

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0?$$

Problema 4: Si $P = \frac{A - Ar^n}{1 - r}$, entonces calcule A .

Problema 4: Si $P = \frac{A - Ar^n}{1 - r}$, entonces calcule A .

Solución:

$$\begin{aligned} P &= \frac{A - Ar^n}{1 - r} \iff P(1 - r) = A(1 - r^n) \\ &\iff A = \frac{P(1 - r)}{1 - r^n}, \text{ siempre que } r \neq 1 \end{aligned}$$

Para la resolución de problemas, considere los siguientes pasos:

Para la resolución de problemas, considere los siguientes pasos:

- Lea cuidadosamente el problema, en reiteradas veces si es necesario.

Para la resolución de problemas, considere los siguientes pasos:

- Lea cuidadosamente el problema, en reiteradas veces si es necesario.
- Represente una de las cantidades desconocidas con una variable y escriba las otras cantidades conocidas en términos de la variable escogida.

Para la resolución de problemas, considere los siguientes pasos:

- Lea cuidadosamente el problema, en reiteradas veces si es necesario.
- Represente una de las cantidades desconocidas con una variable y escriba las otras cantidades conocidas en términos de la variable escogida.
- Haga un resumen de la información dada.

Para la resolución de problemas, considere los siguientes pasos:

- Lea cuidadosamente el problema, en reiteradas veces si es necesario.
- Represente una de las cantidades desconocidas con una variable y escriba las otras cantidades conocidas en términos de la variable escogida.
- Haga un resumen de la información dada.
- Escriba ecuaciones que relacionen las cantidades conocidas con las incógnitas.

Para la resolución de problemas, considere los siguientes pasos:

- Lea cuidadosamente el problema, en reiteradas veces si es necesario.
- Represente una de las cantidades desconocidas con una variable y escriba las otras cantidades conocidas en términos de la variable escogida.
- Haga un resumen de la información dada.
- Escriba ecuaciones que relacionen las cantidades conocidas con las incógnitas.
- Resuelva la ecuación.

Para la resolución de problemas, considere los siguientes pasos:

- Lea cuidadosamente el problema, en reiteradas veces si es necesario.
- Represente una de las cantidades desconocidas con una variable y escriba las otras cantidades conocidas en términos de la variable escogida.
- Haga un resumen de la información dada.
- Escriba ecuaciones que relacionen las cantidades conocidas con las incógnitas.
- Resuelva la ecuación.
- Responda todas las preguntas planteadas en el problema y verifique las soluciones.

Ejemplo : En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres, y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Si en la reunión hay 96 personas, ¿ Cuántos hombres, mujeres y niños hay?.

Ejemplo : En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres, y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Si en la reunión hay 96 personas, ¿ Cuántos hombres, mujeres y niños hay?.

Solución:

Sea x el número de hombres en la reunión, entonces

$$x + 2x + 3(x + 2x) = 96,$$

de donde $x = 8$ y por lo tanto en la reunión hay 8 hombres, 16 mujeres y 72 niños.

Problema 1: Resuelva para x , las siguientes ecuaciones:

1 $6 \left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16} \right) = 3 \left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{8}(3x-2)$

2 $(x-3)^2 = (x+3)(x-3)$

3 $2(2x-1)^2 - (3x+4)^2 = 1 - (x-5)^2$

4 $\frac{2}{3x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{10} - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}$

5 $\frac{1}{3x-3} + \frac{1}{4x+4} = \frac{1}{12x-12}$

$$\bullet \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{1+x} + \frac{1}{x^2-1} = 0$$

$$\bullet \frac{5}{x+3} = \frac{7}{2x+3}$$

$$\bullet \frac{2x}{x-\frac{1}{2}} = \frac{2x-5}{x-\frac{1}{3}}$$

$$\bullet (x+m)^2 - (x+n)^2 = (m-n)^2$$

$$\bullet \frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x+a} = 2$$

$$\bullet \frac{3}{4} \left(\frac{x}{b} + \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{b} - \frac{x}{a} \right) + \frac{5a+13b}{12a}$$

Problema 2: Despeje

- a) R en la ecuación $F = m \frac{v^2}{R}$.
- b) m en la ecuación $T = 2k \sqrt{\frac{m}{k}}$.
- c) t en la ecuación $Q = c(t - s)$.

Problema 3: ¿Para qué valores de m las siguientes ecuaciones no tienen solución?.

- a) $5mx + 2 = 3m + x$
- b) $\frac{m(x - 2)}{4} - \frac{2(mx - 1)}{3} = m - 1$.
- c) $3(x - m) - 4(mx - 1) = 12$

Problema 4: Se han consumido $\frac{7}{8}$ de un bidón de aceite. Reponiendo 38 litros, el bidón queda lleno hasta sus $\frac{3}{5}$ partes, ¿Cuál es la capacidad del bidón?.

Definición

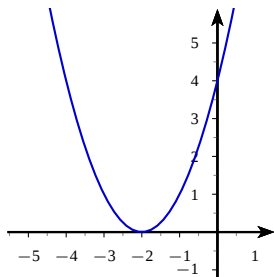
Una relación de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$ y $b, c \in \mathbb{R}$, se llama función cuadrática.

Gráfica de la función cuadrática

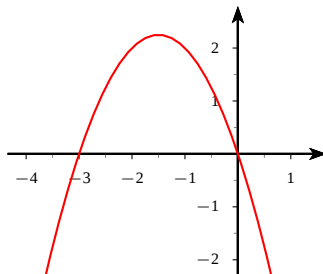
La gráfica de esta función corresponde a una curva llamada **parábola**.

Ejemplos

$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$



$$g(x) = -x^2 - 3x$$

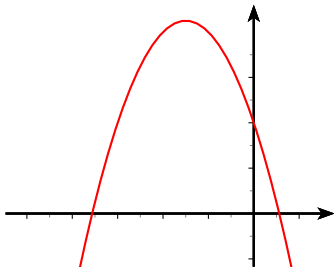


Concavidad y convexidad

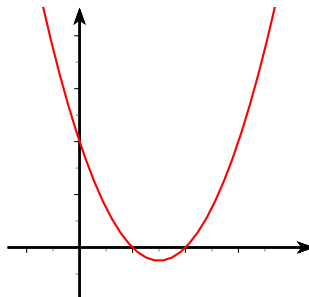
Según sea el signo del coeficiente que acompaña a x^2 , la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, puede ser:

- **Cóncava:** la parábola “abre hacia abajo”.
- **Convexa:** la parábola “abre hacia arriba”.

Cóncava ($a < 0$)



Convexa ($a > 0$)



Ceros de una función

Se llaman **ceros** de una función $f(x)$ a aquellos valores $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 0$, es decir corresponden a la primera coordenada de los puntos en que la gráfica de la función corta al eje X .

En el caso de la función cuadrática, existen **a lo más dos** ceros, o puntos de intersección de la gráfica con el eje X .

Ecuación cuadrática

Para encontrar los ceros de la función cuadrática debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, es decir

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Soluciones de la ecuación cuadrática

Resolveremos de modo general la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.

Soluciones de la ecuación cuadrática

Resolveremos de modo general la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.

Notamos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + \textcolor{red}{2} \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

Soluciones de la ecuación cuadrática

Resolveremos de modo general la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.

Notamos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + \color{red}{2} \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

de modo que $ax^2 + bx + c = 0$ si y solo si $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$,

Soluciones de la ecuación cuadrática

Resolveremos de modo general la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.

Notamos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

de modo que $ax^2 + bx + c = 0$ si y solo si $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$,
despejando x en esta última ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \Leftrightarrow \left| x + \frac{b}{2a} \right| &= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Hemos visto que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, están dadas por la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Discriminante

Se define el discriminante de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ como la expresión

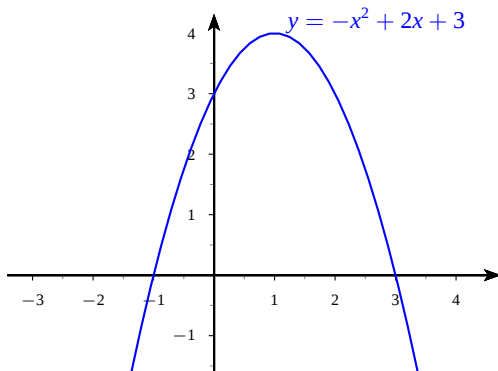
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dependiendo del signo del discriminante se tiene que:

- Si $\Delta > 0$, las dos raíces son reales y distintas, esto es; la parábola corta al eje X en dos puntos.
- Si $\Delta = 0$, las dos raíces son reales e iguales, es decir la parábola corta al eje X en un único punto.
- Si $\Delta < 0$, las dos raíces son complejas conjugadas y en tal caso no existe intersección entre la parábola y el eje X .

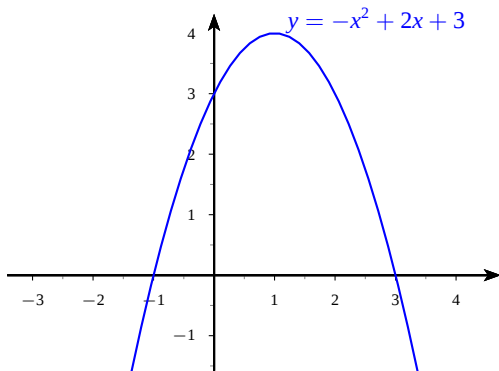
Función cuadrática con $\Delta > 0$

La función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, corta al eje x en dos puntos, pues $\Delta = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0$.



Función cuadrática con $\Delta > 0$

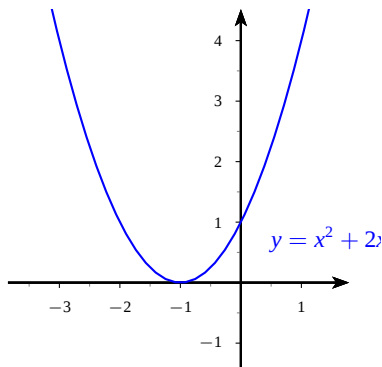
La función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, corta al eje x en dos puntos, pues $\Delta = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0$.



Observamos que los puntos de intersección de la gráfica y el eje X son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$, cuyas primeras coordenadas son las soluciones de la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$

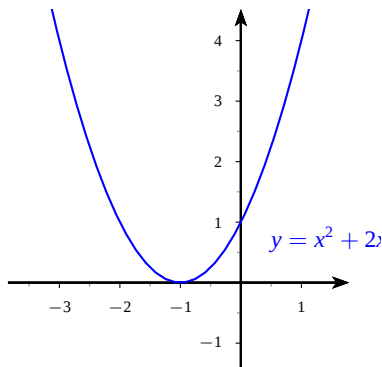
Función cuadrática con $\Delta = 0$

La función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 1$, corta al eje x en un único punto, pues $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$.



Función cuadrática con $\Delta = 0$

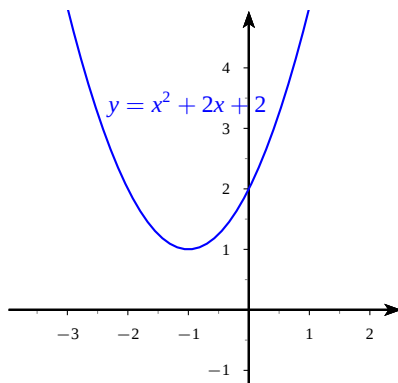
La función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 1$, corta al eje x en un único punto, pues $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$.



El único punto de intersección entre la gráfica de f y el eje X se encuentra en el vértice de la parábola y corresponde al punto $(-1, 0)$, cuya primera coordenada se obtiene resolviendo la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$, o bien $(x + 1)^2 = 0$.

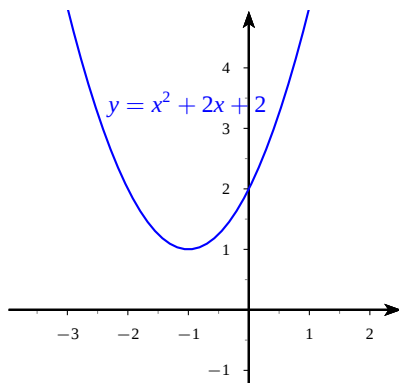
Función cuadrática con $\Delta < 0$

La función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 2$ no corta al eje x , pues $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$,



Función cuadrática con $\Delta < 0$

La función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 2$ no corta al eje x , pues $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$,



Observamos que la gráfica se encuentra siempre por sobre el eje X lo que indica que la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$, no tiene raíces reales.

Observación

Para resolver una ecuación cuadrática, no es necesario recurrir a la fórmula (1)

Observación

Para resolver una ecuación cuadrática, no es necesario recurrir a la fórmula (1)

Problema 1: Resuelva la ecuación $4x = x^2$.

Observación

Para resolver una ecuación cuadrática, no es necesario recurrir a la fórmula (1)

Problema 1: Resuelva la ecuación $4x = x^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}4x &= x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\&\Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4\end{aligned}$$

Observación

Para resolver una ecuación cuadrática, no es necesario recurrir a la fórmula (1)

Problema 1: Resuelva la ecuación $4x = x^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}4x &= x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\&\Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4\end{aligned}$$

Observación

Un error frecuente es dividir por x , perdiendo así la solución $x = 0$.

El siguiente desarrollo conlleva un grave error,

$$\begin{aligned}x^2 + 3x - 10 = 0 &\Rightarrow x^2 + 3x = 10 \\&\Leftrightarrow x(x + 3) = 10 \\&\Rightarrow x = 0 \vee x + 3 = 10 \\&\Rightarrow x = 0 \vee x = 7\end{aligned}$$

Observación

Para resolver esta ecuación basta notar que $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5) = 0$, obteniendo así $x = 2$ o $x = -5$.

La ecuación $(x + 1)^2 - x = x^2 + x - 4$ no tiene solución, pues

$$x^2 + 2x + 1 - x = x^2 + x - 4$$

$$1 = -4$$

Observación

Lo mismo ocurre con $4x(x + 5) = 5(4x - 5)$, ¿por qué?.

Para la ecuación $(x - 4)^2 = 36$, tenemos:

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 = 36 &\implies x - 4 = 6 \vee x - 4 = -6 \\ &\implies x = 10 \vee x = -2\end{aligned}$$

Observación

Desarrollando el cuadrado de binomio y utilizando la fórmula (1), obtenemos el mismo resultado.

Problema 2: Resuelva la ecuación

$$\frac{3}{x-1} = \frac{8x}{2x-1}$$

Problema 2: Resuelva la ecuación

$$\frac{3}{x-1} = \frac{8x}{2x-1}$$

Solución: Suponiendo que $x \neq 1$ y $x \neq \frac{1}{2}$, la ecuación equivale a

$$\begin{aligned} 3(2x-1) &= 8x(x-1) \\ 8x^2 - 14x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Por la fórmula (1), tenemos:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{16} = \frac{14 \pm 10}{16}$$

obteniendo $x = \frac{3}{2}$ o $x = \frac{1}{4}$.

Problema 3: Demuestre que para todo $p, q \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$x^2 + 2(p + q)x + 2pq = 0,$$

tiene raíces reales.

Problema 3: Demuestre que para todo $p, q \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$x^2 + 2(p + q)x + 2pq = 0,$$

tiene raíces reales.

Solución : Basta estudiar el discriminante de la ecuación cuadrática,

$$\begin{aligned}\Delta &= (2(p + q))^2 - 4(2pq) \\ &= 4(p^2 + 2pq + q^2) - 8pq \\ &= 4p^2 + 4q^2 \\ &= 4(p^2 + q^2) \geq 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

luego, las raíces de la ecuación son reales.

Problema 4: Estudie la ecuación

$$px^2 - (p^2 + 1)x + p = 0$$

para $p \in \mathbb{R}$.

Problema 4: Estudie la ecuación

$$px^2 - (p^2 + 1)x + p = 0$$

para $p \in \mathbb{R}$.

Solución:

- 1 Si $p = 0$, la ecuación se reduce a $-x = 0$, en donde $x = 0$.
- 2 Si $p \neq 0$, la ecuación es de segundo grado y sus soluciones están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(p^2 + 1) \pm \sqrt{(p^2 + 1)^2 - 4p^2}}{2p} = \frac{(p^2 + 1) \pm \sqrt{(p^2 - 1)^2}}{2p} \\ &= \frac{(p^2 + 1 \pm (p^2 - 1))}{2p} \end{aligned}$$

obteniendo $x = p$ o $x = \frac{1}{p}$.

Problema 1: Resuelva para x las siguientes ecuaciones:

a) $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$.

b) $(2x)^2 + (2x + 1)^2 + (2x + 3)^2 = 390$.

c) $4x(x + 1) = 5x^3$.

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{7}{x-2} - \frac{x}{x^2-3x+2}$.

e) $2x^4 + 3x^2 + 2 = 0.$

f) $\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} = -\frac{5}{14}.$

g) $abx^2 + (a^2 - 2b^2)x = 2ab.$

h) $\frac{ax^2}{4} + \frac{x}{2} = \frac{2}{a}.$

i) $x^3 - 7x + 6 = 0$

Problema 2: Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que una solución de la ecuación

$$(k^2 + 2)x^2 - 7x - 2k = 1$$

sea $x = -\frac{1}{2}$.

Problema 3: Para cerrar un terreno rectangular de 750 m^2 se usaron 110 m de cerca. Calcule las dimensiones del terreno.