

Clase 3

Funciones exponencial y logarítmica

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2013

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Se define la función logaritmo de x , en base a , denotada por $\log_a(x)$, como:

$$\log_a(x) = y \iff x = a^y.$$

La función logarítmica con base e , se llama logaritmo natural, y se denota por $\ln(x)$, es decir:

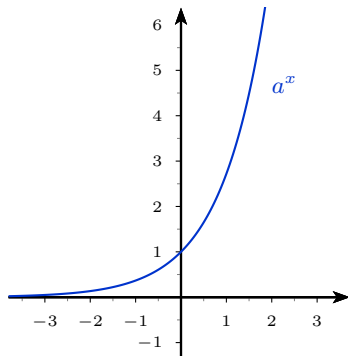
$$\ln(x) = y \iff x = e^y$$

Notamos que la función logarítmica está definida en términos de la función exponencial $f(x) = a^x$.

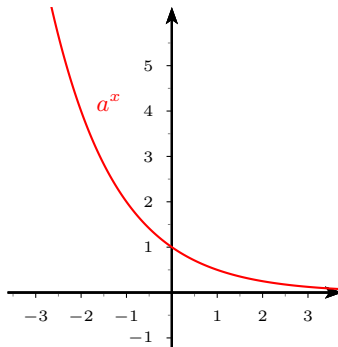
La representación gráfica y algunas propiedades de estas funciones, se muestran a continuación:

Gráficas de la función exponencial, $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x, \text{ con } a > 1$$

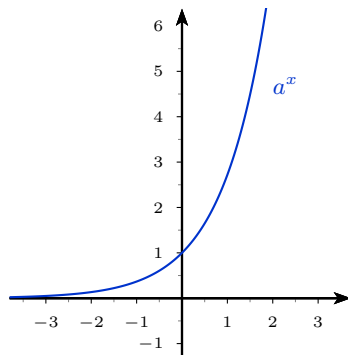


$$f(x) = a^x, \text{ con } 0 < a < 1$$

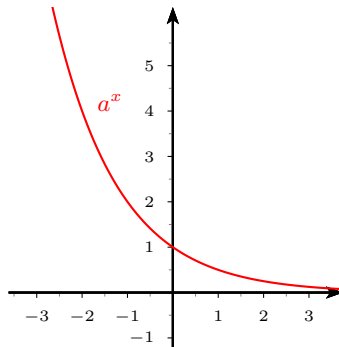


Gráficas de la función exponencial, $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x, \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = a^x, \text{ con } 0 < a < 1.$$

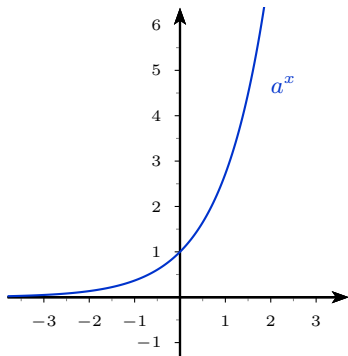


Observe que:

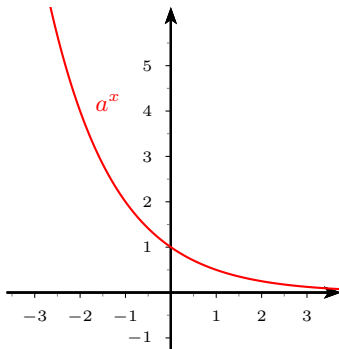
- si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función **creciente**,

Gráficas de la función exponencial, $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x, \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = a^x, \text{ con } 0 < a < 1$$

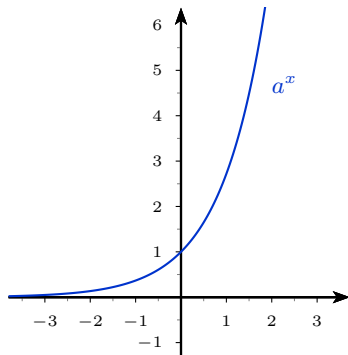


Observe que:

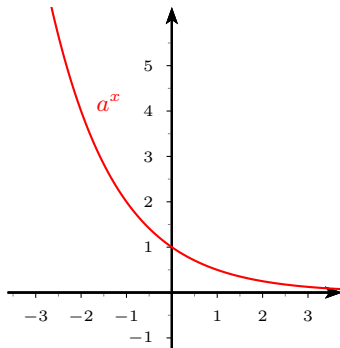
- si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función **creciente**,
- si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función **decreciente**,

Gráficas de la función exponencial, $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x, \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = a^x, \text{ con } 0 < a < 1$$

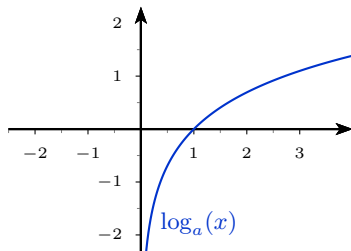


Observe que:

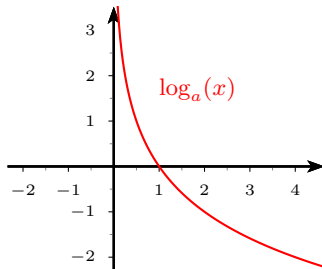
- si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función **creciente**,
- si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función **decreciente**,
- en ambos casos $f(0) = 1$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Función logarítmica, $f(x) = \log_a(x)$

$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } a > 1$$

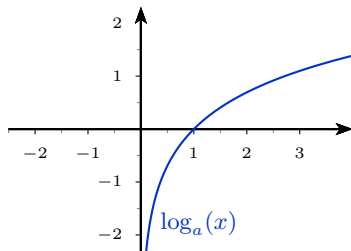


$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } 0 < a < 1$$

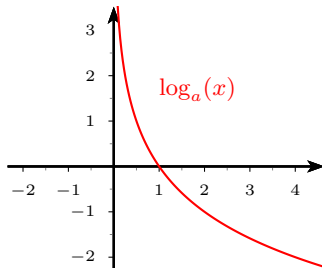


Función logarítmica, $f(x) = \log_a(x)$

$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } 0 < a < 1$$

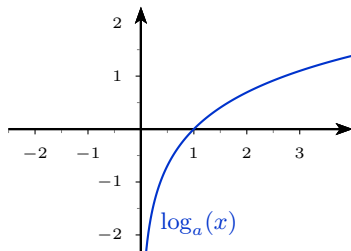


Observe que:

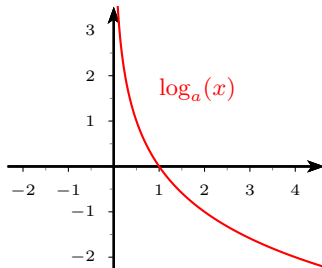
- si $a > 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **creciente**,

Función logarítmica, $f(x) = \log_a(x)$

$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } 0 < a < 1$$

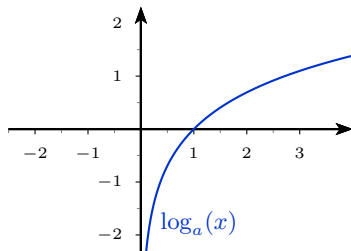


Observe que:

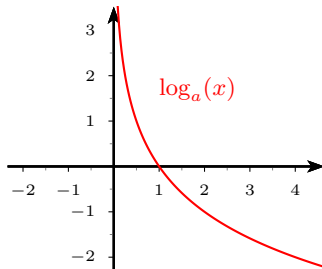
- si $a > 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **creciente**,
- si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **decreciente**,

Función logarítmica, $f(x) = \log_a(x)$

$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } 0 < a < 1$$

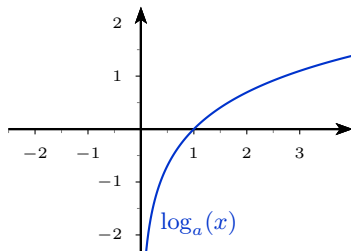


Observe que:

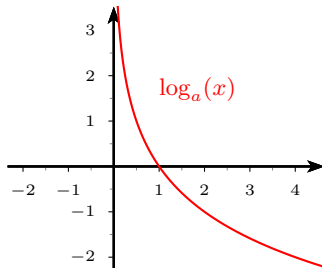
- si $a > 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **creciente**,
- si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **decreciente**,
- si $a > 1$, $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$, mientras que $f(x) > 0$ para $x \in (1, \infty)$,

Función logarítmica, $f(x) = \log_a(x)$

$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } 0 < a < 1$$

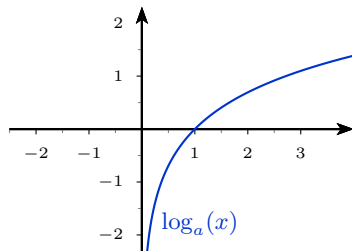


Observe que:

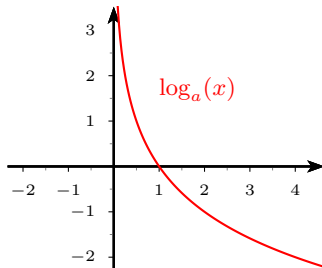
- si $a > 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **creciente**,
- si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **decreciente**,
- si $a > 1$, $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$, mientras que $f(x) > 0$ para $x \in (1, \infty)$,
- si $0 < a < 1$, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$, mientras que $f(x) < 0$ para $x \in (1, \infty)$,

Función logarítmica, $f(x) = \log_a(x)$

$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } a > 1$$



$$f(x) = \log_a(x), \text{ con } 0 < a < 1$$



Observe que:

- si $a > 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **creciente**,
- si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función **decreciente**,
- si $a > 1$, $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$, mientras que $f(x) > 0$ para $x \in (1, \infty)$,
- si $0 < a < 1$, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$, mientras que $f(x) < 0$ para $x \in (1, \infty)$,
- en ambos casos $f(1) = 0$ y $f(a) = 1$.

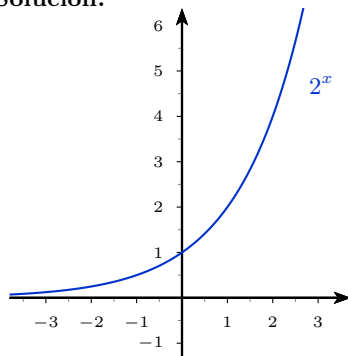
Problema 1: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = 2^x$ y responda:

- a) ¿El gráfico de la función corta al eje X ?
- b) ¿El gráfico de la función corta al eje Y ?, ¿en qué punto?
- c) La expresión $y = (-2)^x$, ¿representa una función exponencial?

Problema 1: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = 2^x$ y responda:

- a) ¿El gráfico de la función corta al eje X ?
- b) ¿El gráfico de la función corta al eje Y ?, ¿en qué punto?
- c) La expresión $y = (-2)^x$, ¿representa una función exponencial?

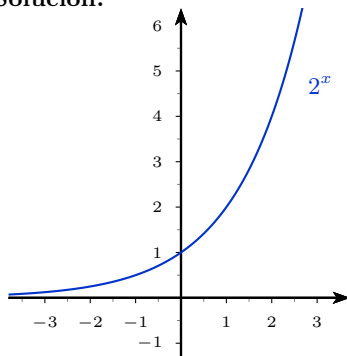
Solución:



Problema 1: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = 2^x$ y responda:

- a) ¿El gráfico de la función corta al eje X ?
- b) ¿El gráfico de la función corta al eje Y ?, ¿en qué punto?
- c) La expresión $y = (-2)^x$, ¿representa una función exponencial?

Solución:

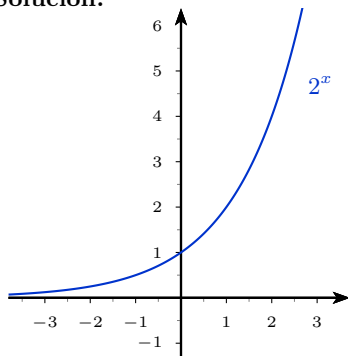


- a) La gráfica no interseca el eje X , pues $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 1: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = 2^x$ y responda:

- a) ¿El gráfico de la función corta al eje X ?
- b) ¿El gráfico de la función corta al eje Y ?, ¿en qué punto?
- c) La expresión $y = (-2)^x$, ¿representa una función exponencial?

Solución:

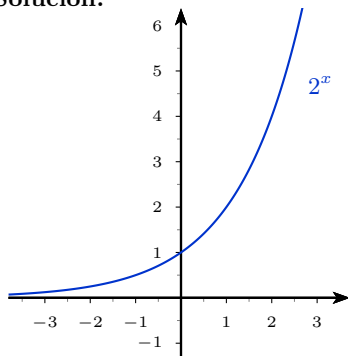


- a) La gráfica no intersecta el eje X , pues $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) La gráfica intersecta al eje Y en el punto $(0, 1)$.

Problema 1: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = 2^x$ y responda:

- a) ¿El gráfico de la función corta al eje X ?
- b) ¿El gráfico de la función corta al eje Y ?, ¿en qué punto?
- c) La expresión $y = (-2)^x$, ¿representa una función exponencial?

Solución:



- a) La gráfica no intersecta el eje X , pues $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) La gráfica intersecta al eje Y en el punto $(0, 1)$.
- c) La expresión $(-2)^x$ no representa una función exponencial, pues la base es menor que cero.

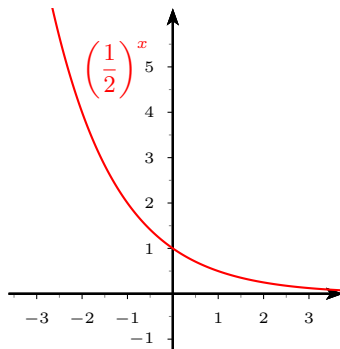
Problema 2: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y responda

- a) ¿el gráfico corta al eje Y en algún punto?, ¿cuál?
- b) ¿el gráfico corta al eje en algún punto?

Problema 2: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y responda

- a) ¿el gráfico corta al eje Y en algún punto?, ¿cuál?
- b) ¿el gráfico corta al eje en algún punto?

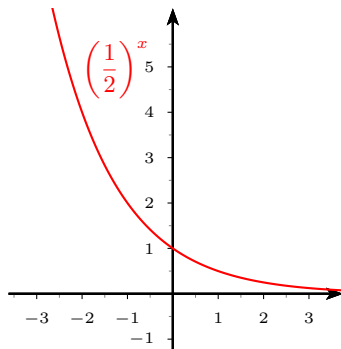
Solución



Problema 2: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y responda

- a) ¿el gráfico corta al eje Y en algún punto?, ¿cuál?
- b) ¿el gráfico corta al eje en algún punto?

Solución

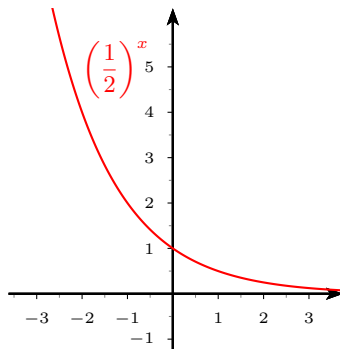


- a) La gráfica corta al eje Y en el punto (0, 1).

Problema 2: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y responda

- a) ¿el gráfico corta al eje Y en algún punto?, ¿cuál?
- b) ¿el gráfico corta al eje en algún punto?

Solución

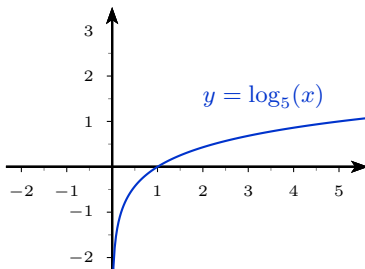


- a) La gráfica corta al eje Y en el punto $(0, 1)$.
- b) La gráfica no corta al eje X ,
pues $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 3: Determine si existe algún punto de intersección entre la gráfica de la función $f(x) = \log_5(x)$ con el eje x.

Problema 3: Determine si existe algún punto de intersección entre la gráfica de la función $f(x) = \log_5(x)$ con el eje x .

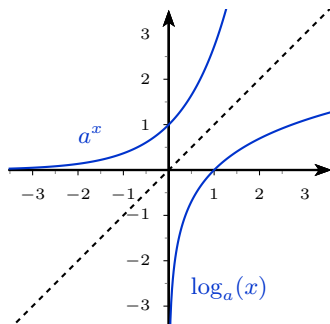
Solución: La gráfica de una función logarítmica corta al eje X en el punto $(1, 0)$, tal como se ve en la gráfica de $f(x) = \log_5(x)$:



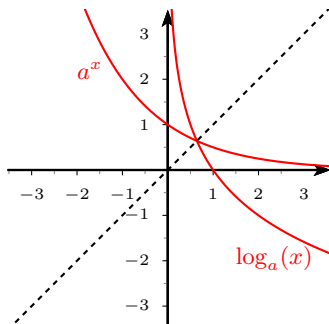
Simetría entre los gráficos de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a(x)$

Observe que los gráficos de las funciones exponencial y logarítmica son simétricos respecto de la recta $y = x$.

Para $a > 1$



Para $0 < a < 1$



¿En qué punto del plano se cortan las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica?

Algunas propiedades de los logaritmos que debemos recordar, son las siguientes:

Propiedades

Para $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene que:

➊ Logaritmo de un producto: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

➋ Logaritmo de un cuociente: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

➌ Logaritmo de una potencia: $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

➍ Cambio de base de un logaritmo: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x , en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x , en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Solución: $\log_6 x = 3 \iff 6^3 = x$, luego $x = 216$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x , en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Solución: $\log_6 x = 3 \iff 6^3 = x$, luego $x = 216$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x , en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Solución: $\log_6 x = 3 \iff 6^3 = x$, luego $x = 216$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$

Solución: $\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = x$, luego $x = 2$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x , en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Solución: $\log_6 x = 3 \iff 6^3 = x$, luego $x = 216$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$

Solución: $\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = x$, luego $x = 2$

c) $\log_x \frac{1}{8} = 3$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x , en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Solución: $\log_6 x = 3 \iff 6^3 = x$, luego $x = 216$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$

Solución: $\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = x$, luego $x = 2$

c) $\log_x \frac{1}{8} = 3$

Solución: $\log_x \frac{1}{8} = 3 \iff x^3 = \frac{1}{8} \iff x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x , en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Solución: $\log_6 x = 3 \iff 6^3 = x$, luego $x = 216$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$

Solución: $\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = x$, luego $x = 2$

c) $\log_x \frac{1}{8} = 3$

Solución: $\log_x \frac{1}{8} = 3 \iff x^3 = \frac{1}{8} \iff x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

d) $\log_2 \frac{1}{8} = x$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x , en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Solución: $\log_6 x = 3 \iff 6^3 = x$, luego $x = 216$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$

Solución: $\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = x$, luego $x = 2$

c) $\log_x \frac{1}{8} = 3$

Solución: $\log_x \frac{1}{8} = 3 \iff x^3 = \frac{1}{8} \iff x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

d) $\log_2 \frac{1}{8} = x$

Solución: $\log_2 \frac{1}{8} = x \iff 2^x = \frac{1}{8} \iff 2^x = 2^{-3} \iff x = -3$

Problema 5: Aplicando las propiedades de los logaritmos, obtenga el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_b b + \log_a a$

Problema 5: Aplicando las propiedades de los logaritmos, obtenga el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_b b + \log_a a$

Solución: $\log_b b + \log_a a = 1 + 1 = 2$

Problema 5: Aplicando las propiedades de los logaritmos, obtenga el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_b b + \log_a a$

Solución: $\log_b b + \log_a a = 1 + 1 = 2$

b) $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n$

Problema 5: Aplicando las propiedades de los logaritmos, obtenga el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_b b + \log_a a$

Solución: $\log_b b + \log_a a = 1 + 1 = 2$

b) $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n$

Solución: $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n = 0 + n \log_b b + n \log_d d = n + n = 2n$

Problema 5: Aplicando las propiedades de los logaritmos, obtenga el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_b b + \log_a a$

Solución: $\log_b b + \log_a a = 1 + 1 = 2$

b) $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n$

Solución: $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n = 0 + n \log_b b + n \log_d d = n + n = 2n$

c) $\log_a (ac) + \log_p p^3 + \log_b b - \log_a c$

Problema 5: Aplicando las propiedades de los logaritmos, obtenga el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_b b + \log_a a$

Solución: $\log_b b + \log_a a = 1 + 1 = 2$

b) $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n$

Solución: $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n = 0 + n \log_b b + n \log_d d = n + n = 2n$

c) $\log_a (ac) + \log_p p^3 + \log_b b - \log_a c$

Solución:

$$\log_a (ac) + \log_p p^3 + \log_b b - \log_a c = \log_a a + \log_a c + 3 \log_p p + 1 - \log_a c = 5$$

Problema 6: Calcule el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log(0,0001)$

Problema 6: Calcule el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log(0,0001)$

Solución: $\log(0,0001) = \log(10^{-4}) = -4 \log 10 = -4$

Problema 6: Calcule el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log(0,0001)$

Solución: $\log(0,0001) = \log(10^{-4}) = -4 \log 10 = -4$

b) $\log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right)$

Problema 6: Calcule el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log(0,0001)$

Solución: $\log(0,0001) = \log(10^{-4}) = -4 \log 10 = -4$

b) $\log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}\log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right) &= \log(2 \cdot 10) + \log(10) - \log(2) \\ &= \log(2) + \log(10) + \log(10) - \log(2) = 2\end{aligned}$$

Problema 6: Calcule el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log(0,0001)$

Solución: $\log(0,0001) = \log(10^{-4}) = -4 \log 10 = -4$

b) $\log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}\log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right) &= \log(2 \cdot 10) + \log(10) - \log(2) \\ &= \log(2) + \log(10) + \log(10) - \log(2) = 2\end{aligned}$$

c) $\log(10^{-4}) + \log\left(\frac{1}{100}\right)$

Problema 6: Calcule el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log(0,0001)$

Solución: $\log(0,0001) = \log(10^{-4}) = -4 \log 10 = -4$

b) $\log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}\log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right) &= \log(2 \cdot 10) + \log(10) - \log(2) \\ &= \log(2) + \log(10) + \log(10) - \log(2) = 2\end{aligned}$$

c) $\log(10^{-4}) + \log\left(\frac{1}{100}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}\log(10^{-4}) + \log\left(\frac{1}{100}\right) &= -4 \log(10) + \log(10^{-2}) \\ &= -4 \log(10) - 2 \log(10) = -6\end{aligned}$$

Problema 7: Aplicando las propiedades de los logaritmos, desarrolle las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy}$

Problema 7: Aplicando las propiedades de los logaritmos, desarrolle las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy}$

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy} &= \log 5a^2b^4\sqrt{c} - \log 2xy \\ &= \log 5 + 2\log a + 4\log b + \frac{1}{2}\log c - \log 2 - \log x - \log y\end{aligned}$$

Problema 7: Aplicando las propiedades de los logaritmos, desarrolle las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy}$

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy} &= \log 5a^2b^4\sqrt{c} - \log 2xy \\ &= \log 5 + 2\log a + 4\log b + \frac{1}{2}\log c - \log 2 - \log x - \log y\end{aligned}$$

b) $\log \left(\frac{a\sqrt{c}}{2} \right)^4$

Problema 7: Aplicando las propiedades de los logaritmos, desarrolle las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy}$

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy} &= \log 5a^2b^4\sqrt{c} - \log 2xy \\ &= \log 5 + 2\log a + 4\log b + \frac{1}{2}\log c - \log 2 - \log x - \log y\end{aligned}$$

b) $\log \left(\frac{a\sqrt{c}}{2} \right)^4$

Solución:

$$\log \left(\frac{a\sqrt{c}}{2} \right)^4 = 4 \left(\log a + \frac{1}{2}\log c - \log 2 \right) = 4\log a + 2\log c - 4\log 2$$

c) $\log \sqrt{\frac{2ab}{x^2y}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\log \sqrt{\frac{2ab}{x^2y}} &= \frac{1}{2} (\log 2ab - \log x^2y) \\ &= \frac{1}{2} (\log 2 + \log a + \log b - 2 \log x - \log y) \\ &= \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \log x - \frac{1}{2} \log y\end{aligned}$$

Problema 1: Verifique si $\log_c a \cdot \log_a b \cdot \log_b c = 1$.

Problema 2: La cantidad Q de carbono 14 radioactivo, que permanece t años después de que un organismo muere, está dada por el modelo

$$Q = Q_0 e^{-0,00121t}$$

Un cráneo humano es descubierto en una excavación arqueológica y tiene un 15 % de la cantidad original de carbono 14 presente ¿Cuál es la edad de ese cráneo?

Problema 3 La escala que mide la intensidad de los terremotos se conoce como escala Richter en honor al sismólogo americano Charles Richter (1900-1985). La fuerza de un terremoto medida por la escala Richter está dada por la expresión

$$R = \log \frac{E}{I_0},$$

donde E es la intensidad de las vibraciones del terremoto e I_0 es la intensidad de la unidad de un terremoto estándar, esta unidad estándar es medida por un instrumento conocido como sismógrafo, el cual detecta las vibraciones en la corteza terrestre.

La escala Richter es una medida comparativa, más que una medida absoluta. El día 14 de mayo de 1995, a las 18 : 28 : 25 hrs, el Servicio de Información Nacional de Terremotos de los Estados Unidos informó de un terremoto en el sur de California que midió 3.0 en la escala Richter, pero pocas personas se dieron cuenta de esto. Anteriormente, ese mismo año, el día 17 de enero de 1995, un terremoto en Kobe, Japón, ocasionó sobre 2.000 muertos y billones de dólares en daños, este terremoto midió 7.2 en la escala Richter. ¿Cuánto más severo fue el terremoto de Kobe, que el del sur de California?

De acuerdo a la definición de la escala Richter;

$$3,0 = \log \left(\frac{E_{California}}{I_0} \right)$$
$$\text{y } 7,2 = \log \left(\frac{E_{Kobe}}{I_0} \right),$$

escribiendo nuevamente estas ecuaciones, usando la propiedad de los logaritmos que dice que $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$, se obtiene:

$$3,0 = \log E_{California} - \log I_0$$
$$\text{y } 7,2 = \log E_{Kobe} - \log I_0,$$

cuando restamos las dos ecuaciones tenemos:

$$7,2 - 3,0 = \log E_{Kobe} - \log I_0 - (\log E_{California} - \log I_0)$$

$$4,2 = \log E_{Kobe} - \log E_{California},$$

usando ahora la misma propiedad de los logaritmos inversamente,

$$4,2 = \log \left(\frac{E_{Kobe}}{E_{California}} \right),$$

por lo tanto,

$$\frac{E_{Kobe}}{E_{California}} = 10^{4,2}$$