

Clase 2

Expresiones algebraicas

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2013

Problema 1: En cada una de las siguientes expresiones, simplifique indicando qué condiciones deben satisfacer las constantes a , b , c y d de modo que sea posible simplificar.

a) $\frac{15a^3b^2}{5ab^2}$

Problema 1: En cada una de las siguientes expresiones, simplifique indicando qué condiciones deben satisfacer las constantes a , b , c y d de modo que sea posible simplificar.

a) $\frac{15a^3b^2}{5ab^2}$

Solución: La expresión es válida solo si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, en tal caso, se tiene que

Problema 1: En cada una de las siguientes expresiones, simplifique indicando qué condiciones deben satisfacer las constantes a , b , c y d de modo que sea posible simplificar.

a) $\frac{15a^3b^2}{5ab^2}$

Solución: La expresión es válida solo si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, en tal caso, se tiene que

$$\frac{15a^3b^2}{5ab^2} = \frac{15}{5}a^{3-1}b^{2-2} = 3a^2b^0 = 3a^2$$

b) $\frac{121a^4c^5d^7}{11ac^5d^8}$

Problema 1: En cada una de las siguientes expresiones, simplifique indicando qué condiciones deben satisfacer las constantes a , b , c y d de modo que sea posible simplificar.

a) $\frac{15a^3b^2}{5ab^2}$

Solución: La expresión es válida solo si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, en tal caso, se tiene que

$$\frac{15a^3b^2}{5ab^2} = \frac{15}{5}a^{3-1}b^{2-2} = 3a^2b^0 = 3a^2$$

b) $\frac{121a^4c^5d^7}{11ac^5d^8}$

Solución: para $a \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ se tiene

$$\frac{121a^4c^5d^7}{11ac^5d^8} = \frac{121}{11}a^{4-1}c^{5-5}d^{7-8} = 11a^3c^0d^{-1} = \frac{11a^3}{d}$$

Problema 2: Simplifique indicando las restricciones que sean necesarias.

a)
$$\frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$

Problema 2: Simplifique indicando las restricciones que sean necesarias.

a) $\frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 - 4x^2 + 4x} &= \frac{x(x^2 + 3x - 10)}{x(x^2 - 4x + 4)} \quad \text{si } x \neq 0, \\ &= \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)^2} \quad \text{y para } x \neq 2 \\ &= \frac{x+5}{x-2}\end{aligned}$$

luego para $x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ se tiene que $\frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{x+5}{x-2}$

$$b) \frac{(a-b)^2 - c^2}{a^2 - (b-c)^2}$$

$$b) \frac{(a-b)^2 - c^2}{a^2 - (b-c)^2}$$

Solución: siempre que $b \neq a + c$ y $c \neq a + b$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2 - c^2}{a^2 - (b-c)^2} &= \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{(a-(b-c))(a+(b-c))} \\ &= \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)} \\ &= \frac{a-b-c}{a+b-c}, \end{aligned}$$

así, siempre que $b \neq a + c$ y $c \neq a + b$, se tiene que

$$\frac{(a-b)^2 - c^2}{a^2 - (b-c)^2} = \frac{a-b-c}{a+b-c}$$

Problema 3: Simplifique la expresión $\frac{ac - ad + bc - bd}{2c + 3bc - 2d - 3bd}$

Problema 3: Simplifique la expresión $\frac{ac - ad + bc - bd}{2c + 3bc - 2d - 3bd}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{ac - ad + bc - bd}{2c + 3bc - 2d - 3bd} &= \frac{a(c - b) + b(c - d)}{2c - 2d - 3bd + 3bc}, \quad \text{para } c \neq d \text{ y } b \neq -\frac{2}{3}, \\ &= \frac{a(c - b) + b(c - d)}{2(c - d) + 3b(c - d)} \\ &= \frac{a + b}{2 + 3b}\end{aligned}$$

Problema 4: Verifique si $\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = a + b$. Analice restricciones.

Problema 4: Verifique si $\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = a + b$. Analice restricciones.

Solución: La expresión del lado izquierdo es válida solo si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, en tal caso:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} &= \frac{\frac{b^2 - a^2}{ab}}{\frac{a - b}{ab}}, \quad \text{como } ab \neq 0, \text{ tenemos que} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{a - b} \\ &= \frac{(b - a)(b + a)}{a - b}, \quad \text{si } a \neq b, \\ &= -(a + b) \neq a + b,\end{aligned}$$

luego, como $a \neq b \neq 0$, no se cumple la igualdad.

Problema 5: Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ se cumple que

$$\frac{2(x^3 + 1)}{x + 1} - \frac{x^3 - 1}{x - 1} + \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = (x - 1)^2$$

Problema 5: Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ se cumple que

$$\frac{2(x^3 + 1)}{x + 1} - \frac{x^3 - 1}{x - 1} + \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = (x - 1)^2$$

Solución: Sea $E = \frac{2(x^3 + 1)}{x + 1} - \frac{x^3 - 1}{x - 1} + \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$, factorizando se tiene que

$$\begin{aligned} E &= \frac{2(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} - \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} + \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\ &= 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) + x \\ &= 2x^2 - 2x + 2 - x^2 - x - 1 + x \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x - 1)^2, \end{aligned}$$

luego, la igualdad se cumple para todo $x \neq 1$ y $x \neq -1$.

Problema 6: Indique para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, la expresión $E(a)$ está definida y simplifique.

$$E(a) = \frac{\frac{3}{a-2} - \frac{2}{a-3}}{\frac{1}{a-3} - \frac{1}{a-2}},$$

Problema 6: Indique para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, la expresión $E(a)$ está definida y simplifique.

$$E(a) = \frac{\frac{3}{a-2} - \frac{2}{a-3}}{\frac{1}{a-3} - \frac{1}{a-2}},$$

Solución: La expresión $E(a)$ está definida para $a \neq 2$ y $a \neq 3$, en tal caso:

$$\begin{aligned} E(a) &= \frac{\frac{3(a-3) - 2(a-2)}{(a-2)(a-3)}}{\frac{a-2 - (a-3)}{(a-3)(a-2)}} \\ &= \frac{3(a-3) - 2(a-2)}{a-2 - (a-3)} \\ &= \frac{3a - 9 - 2a + 4}{a - 2 - a + 3} = a - 5 \end{aligned}$$

Problema 7: Determine si la igualdad siguiente es verdadera o falsa.
¿Existe alguna restricción para los valores de a ?, justifique.

$$\frac{\frac{1}{a}}{a - \frac{a^2}{a+1}} = -1$$

Problema 7: Determine si la igualdad siguiente es verdadera o falsa.
¿Existe alguna restricción para los valores de a ?, jufique.

$$\frac{1}{a - \frac{a}{a - \frac{a^2}{a + 1}}} = -1$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a - \frac{a}{a - \frac{a^2}{a + 1}}} &= \frac{1}{a - \frac{a}{\frac{a(a + 1) - a^2}{a + 1}}} \\ &= \frac{1}{a - \frac{a}{\left(\frac{a^2 + a - a^2}{a + 1}\right)}} \\ &= \frac{1}{a - \frac{a}{\frac{a}{a + 1}}} = \frac{1}{a - (a + 1)} = -1, \end{aligned}$$

siempre que $a \neq -1$ y $a \neq 0$.

- 1 Simplifique la expresión $E(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1}}{1 + \frac{1}{x-1}}$
- 2 Simplifique la expresión $E(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \div \left(x - \frac{1}{x+1}\right)$
- 3 Reduzca $\frac{a^2+1}{a} - \frac{2a^2-4a+2}{(a-1)^2}$, a la mínima expresión.
- 4 Demuestre que $\frac{\frac{9+6x+x^2}{9-x^2} \cdot \frac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{8}} \div \frac{2x^2-8x+8}{x-2} = 1$