FUNCTIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

[Versión preliminar]

Prof. Isabel Arratia Z.

En esta unidad estudiaremos funciones f con dominio $D \subseteq \Re^n$ y con valores en el conjunto $\Re$ de los números reales.

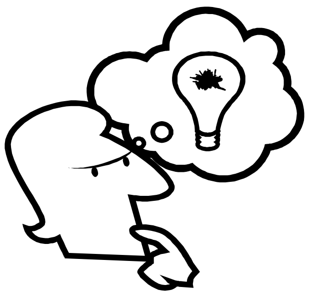
Ejemplos de tales funciones son las siguientes:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$$

$$g(x,y) = \ln(xy)$$

$$h(x,y) = x \operatorname{sen} y$$

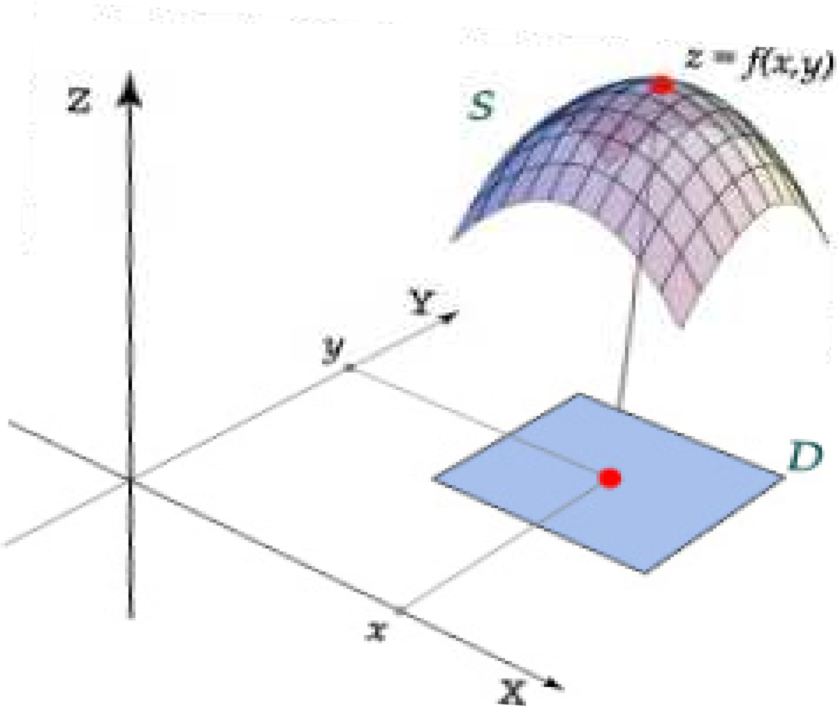
$$w(x,y,z) = 3x + e^{y/z}$$



Ejercicio: Determine el dominio de las funciones definidas precedentemente.

Si $f: D \subseteq \Re^2 \rightarrow \Re$, el **gráfico de f** es un conjunto de puntos de $\Re^3$:

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \Re^3 \ / \ (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}$$



El **gráfico de f,** corresponde a la superficie S en el espacio $\Re^3$.

Por ejemplo, el gráfico de la función f(x, y) = k, $k \in \Re^+$ es el plano de ecuación $z = k$ que se muestra en la figura 1. El gráfico de la función $g(x, y) = 2 - y$ es el plano de ecuación $y + z = 2$ (figura 2).

figura 3.

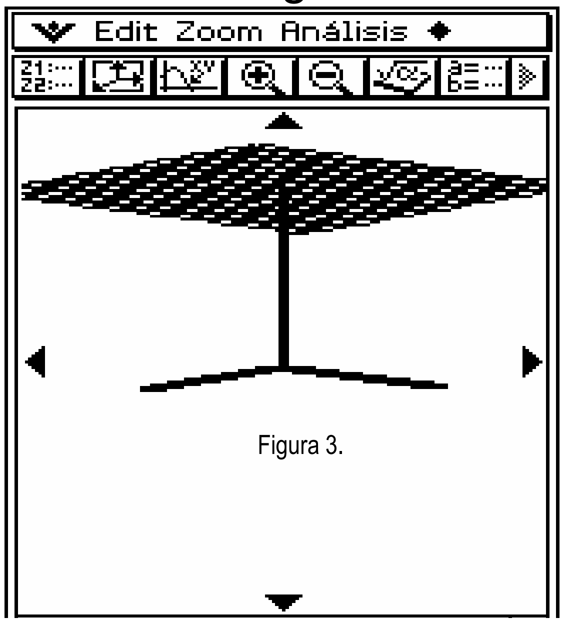


Figura 1

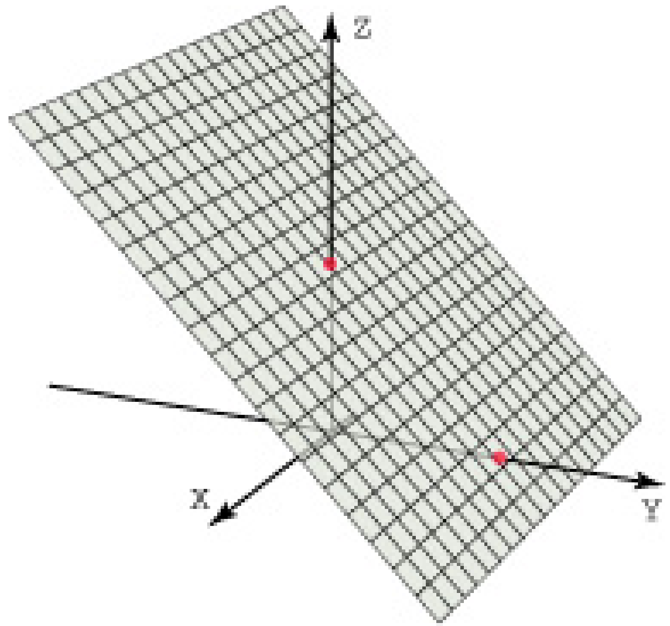
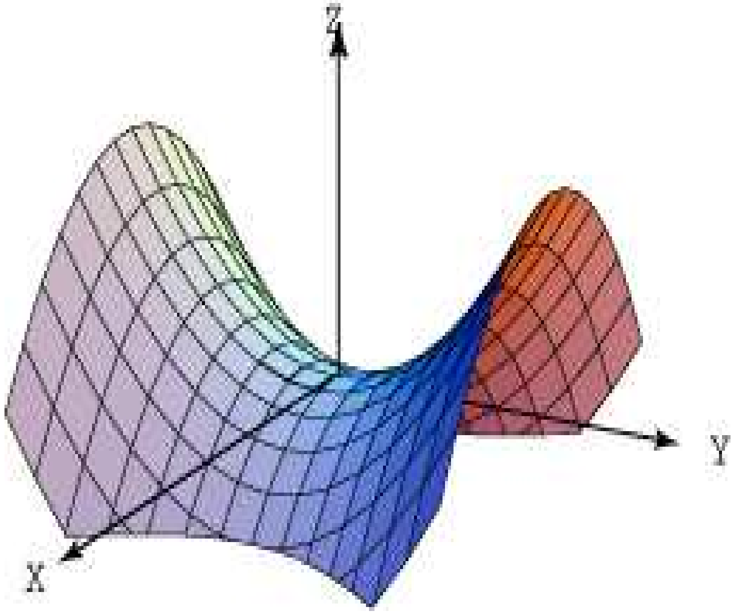
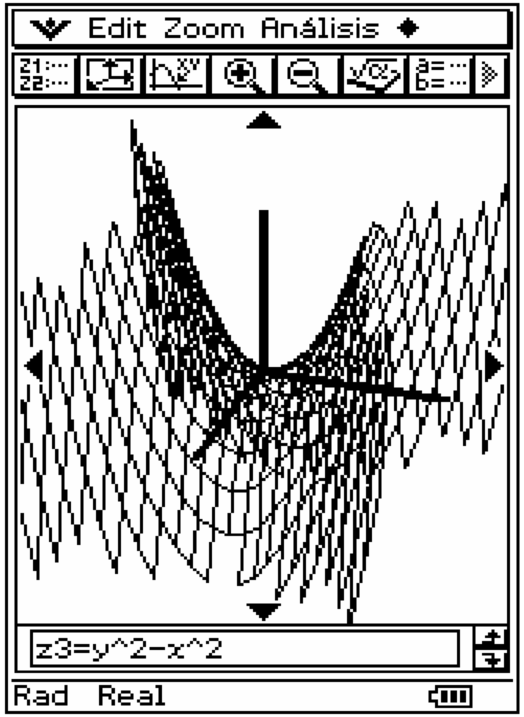


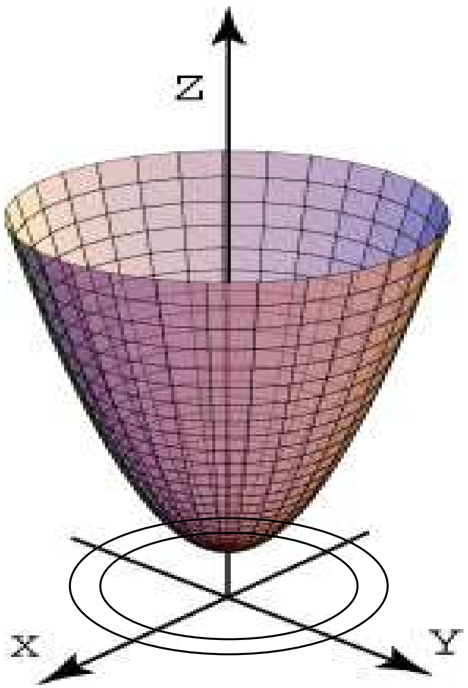
Figura 2

Las gráficas siguientes corresponden a la superficie definida por $f(x, y) = y^2 - x^2$, realizadas con computadora y con calculadora ClassPad 300.





Dibujar la superficie correspondiente a la gráfica de z = f(x, y) no es un asunto fácil. Por esta razón surge la idea de representar la superficie mediante un “mapa de contorno”.



Cada plano horizontal z = c, intersecta la superficie en una curva; la proyección de esa curva sobre el plano XY se llama **curva de nivel** y una colección de tales curvas constituyen un **mapa de contorno**.

Si f es una función de 3 variables y $C > 0$ es una constante, la gráfica de $f(x, y, z) = C$ es una superficie de nivel de la función f. Por ejemplo, las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ tienen la forma $4x^2 + y^2 + z^2 = C$, es decir son elipsoides.

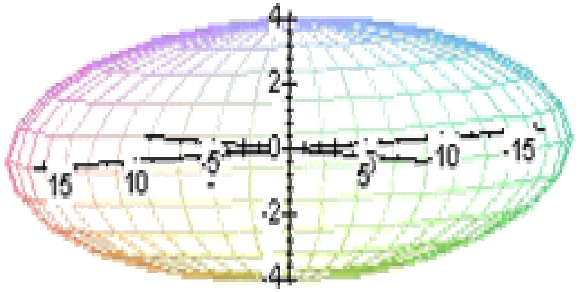
Una **superficie cuadrática** es la gráfica correspondiente a

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

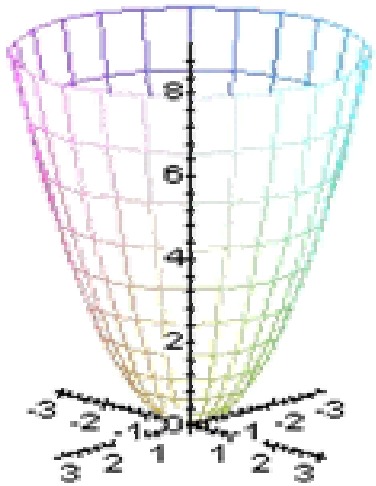
que por traslación y rotación puede expresarse:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad \text{o} \qquad Ax^2 + By^2 + Cz + J = 0.$$

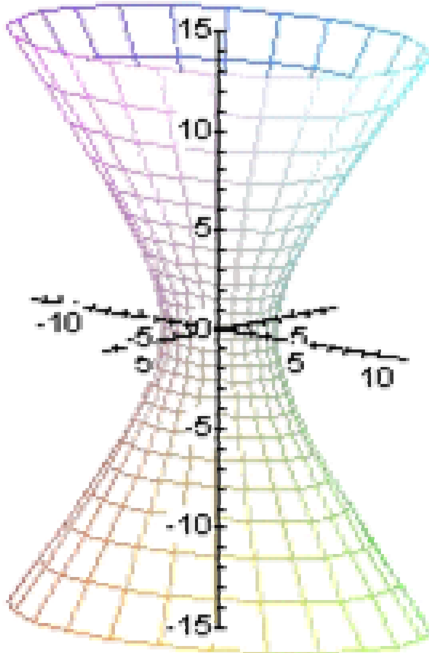
Ejemplos de tales superficies son los elipsoides, hiperboloides de una hoja y de dos hojas, conos, paraboloides elípticos, paraboloides hiperbólicos y los cilindros.



Elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

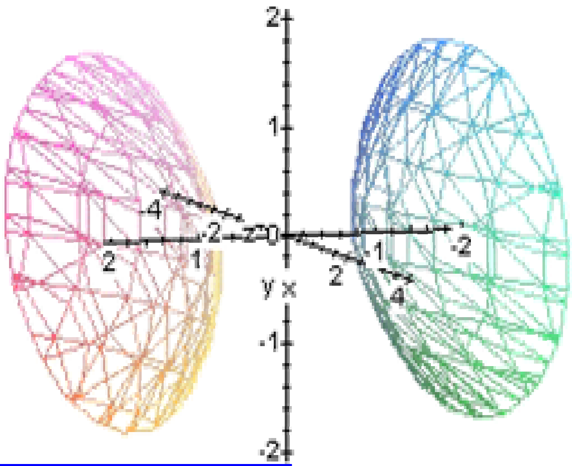


Paraboloide $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

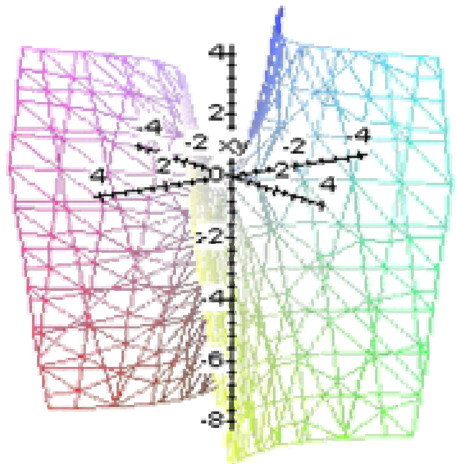


Hiperboloide

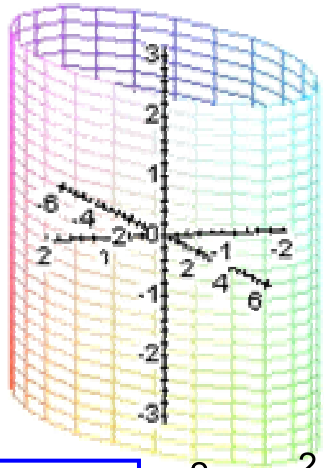
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



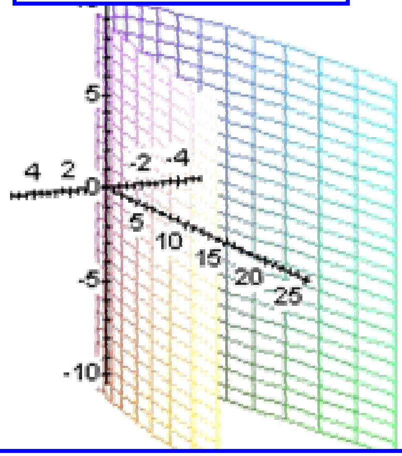
Hiperboloide dos hojas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



Paraboloide hiperbólico $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



Cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Cilindro parabólico $y = ax^2$

Límites y continuidad

Conceptos previos a la definición de límite de una función:

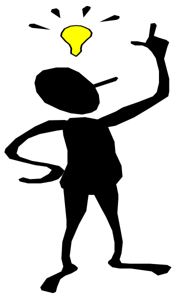
Si $x_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n$ y $\delta > 0$, el conjunto

$$B(x_o, \delta) = \{ P \in \Re^n \ / \ \| P - x_o \| < \delta \}$$

se llama **bola o vecindad abierta** de centro x_0 y radio δ.

El conjunto $B^*(x_o, \delta) = B(x_o, \delta) - \{x_o\}$ se llama vecindad abierta perforada centrada en x_o.

Sea $A \subseteq \Re^n$; el punto $x_o \in \Re^n$ es un **punto de acumulación** de A si $\forall \varepsilon > 0,\ B^*(x_o, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$



Definición: Sea $f : A \subseteq \Re^n \rightarrow \Re$ una función, $x_o \in \Re^n$ punto de acumulación de A y L un número real. Se dice que el límite de f en x_o es L, y se anota

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < \|x - x_o\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Para el caso n = 2, esto significa que si x está en la bola abierta centrada en x_o de radio δ , entonces f(x) está en el intervalo abierto de extremos $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$.

Observaciones:

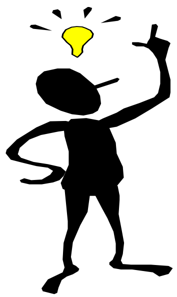
(1) Los límites de funciones de varias variables tienen, en lo que respecta a sumas, productos, cuocientes, las mismas propiedades que los límites de funciones de una variable.

(2) Consideremos la función $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ y estudiemos su límite en (0, 0).

Si nos aproximamos a (0, 0) por el eje X, f(x, y) = f(x, 0) = 1 y la función f(x, y) tiende a 1.

Si nos aproximamos a (0, 0) por el eje Y, f(x, y) = f(0, y) = -1 y la función f(x, y) tiende a -1.

En este caso, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

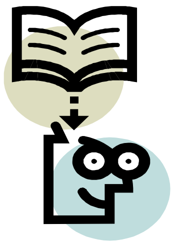


En general, si f(x, y) tiende a L_1 cuando (x, y) se aproxima a (a, b) por una trayectoria C_1 y f(x, y) tiende a L_2 cuando (x, y) se aproxima a (a, b) por una trayectoria C_2 y $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe.

3) En algunos casos, es fácil “reconocer” que un límite no existe. Por ejemplo, la función $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ crece indefinidamente cuando (x, y) se aproxima a (0,0) a lo largo de cualquier trayectoria; luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

4) Sin embargo, a veces, esta situación no es tan clara. Por ejemplo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no existe. Efectivamente, la

función $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ tiende a 0 cuando (x, y) se aproxima a (0, 0) por el eje X, por el eje Y, por la parábola $y = x^2$. Pero si (x, y) se aproxima a (0, 0) por la recta $y = x$, la función f(x, y) tiende a ½ .



Si dos caminos distintos llevan al mismo número L no se puede concluir que el límite es L. Para concluir que un límite existe hay que demostrar que todos los caminos posibles llevan al mismo valor L.

A veces, observar la gráfica de la función con una calculadora o computadora hace conjeturar que el límite existe. En todo caso hay que demostrar esta conjetura.

Por ejemplo, demostremos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < \| (x,y) - (0,0) \| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{4x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

es decir, $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \dfrac{4x^2y}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$

Pero,

$$\left|\frac{4x^2y}{x^2+y^2}\right| = 4\,|\,y\,|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \le 4\,|\,y\,| = 4\sqrt{y^2} \le 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta$$

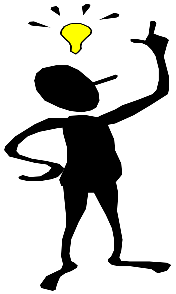
Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ basta escoger $\delta = \varepsilon/4$ para que se cumpla la implicación requerida.

Ejercicio: Calcule, si existen, los siguientes límites.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+4y^2} \qquad \lim_{(x,y,z)\to(2,3,0)} \left(\frac{x}{e^z} + \ln(2x-y)\right)$$

Ejercicio: Use coordenadas polares para calcular,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$



Definición: Sea $f : D \subseteq \Re^2 \rightarrow \Re$ una función, y (a, b) un punto del dominio D. Se dice que f es continua en (a, b) si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

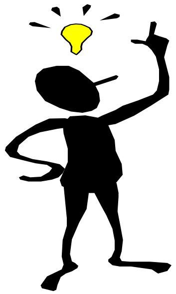
- La función f es continua en su dominio D si f es continua en cada punto de D.
- La definición de continuidad nos dice que si (x, y) cambia levemente, f(x,y) también sufre un cambio leve. En consecuencia, si una superficie es la gráfica de una función continua, esta superficie no tiene ni agujeros ni rupturas.
- De las propiedades de los límites sigue que la suma, producto y cuociente de funciones continuas resultan ser funciones continuas en sus dominios.

- Como vimos antes, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe; luego $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ tiene una discontinuidad no evitable en (0, 0).

- Si $f: D \subseteq \Re^2 \to \Re$ es continua en (a, b) y g es una función real continua en f(a, b), entonces la compuesta g o f es continua en (a, b). Por ejemplo, la función $f(x,y)=e^{x^2-2y^2}$ es continua en $\Re^2$, pues es la compuesta de la función polinómica $f(x, y) = x^2 – 2y^2$ con la función exponencial $f(x) = e^x$.

- Los conceptos de límite y continuidad estudiados para funciones de dos variables se extienden de manera natural a funciones de tres variables.

Derivadas parciales



Sea $z = f(x, y)$ función de dos variables. Si se considera a y como constante, entonces f se convierte en una función de una variable x; su derivada se llama derivada parcial de f con respecto a x y de denota:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad o \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad o \quad f_x \quad o \quad z_x$$

De manera análoga se define la derivada parcial de f con respecto a y:

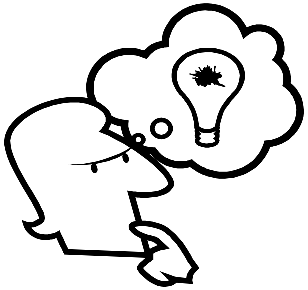
$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad o \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad o \quad f_y \quad o \quad z_y$$

Por lo tanto, f_x y f_y son las funciones definidas por:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Ejercicio: Calcule las derivadas parciales de:



1. $f(x, y) = \sqrt{2x^3 - y}$
2. $f(x, y) = x \operatorname{sen}(2y - x)$
3. $z = x\, e^{-y} + e^{xy}$
4. $f(x, y) = x^y$
5. $z = 4xy^2 + x \ln(y)$

Interpretación geométrica de la derivada parcial

Consideremos la superficie cuya ecuación es $z = f(x, y)$. El plano $y = y_o$ intersecta esta superficie en una curva plana y el valor

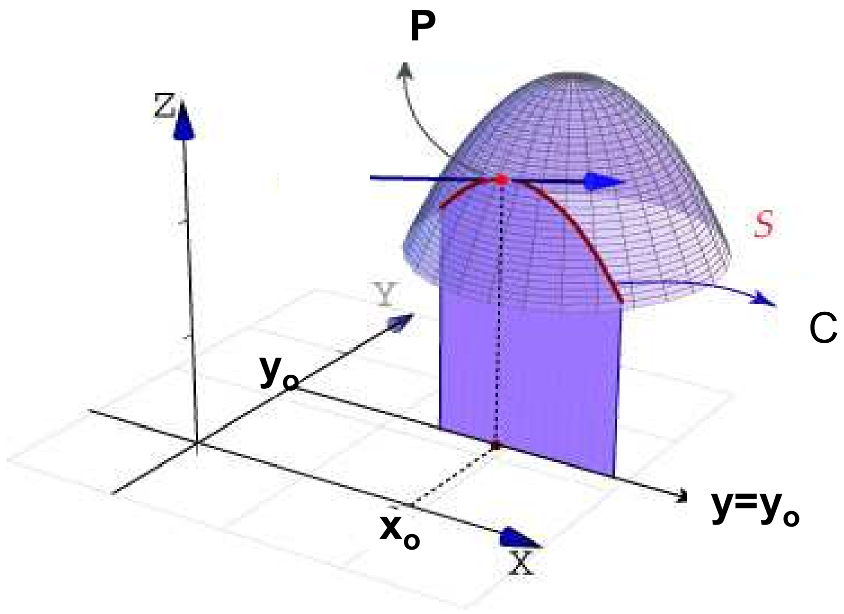
$$f_x(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h}$$

representa la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $P(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

Análogamente, el plano $x = x_o$ intersecta la superficie en una curva plana y

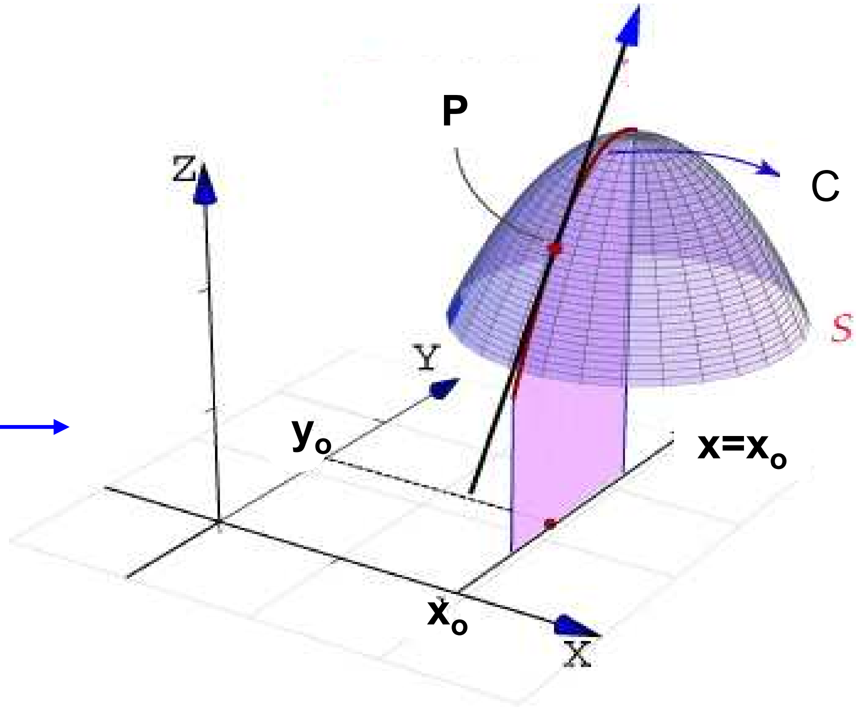
$$f_y(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o, y_o + h) - f(x_o, y_o)}{h}$$

es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $P(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.



Derivada parcial con respecto a x

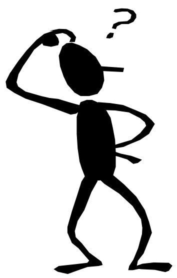
Derivada parcial con respecto a y



Ejemplo: Consideremos la superficie dada por

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

La derivada parcial $f_x = -x$ proporciona las pendientes de las rectas tangentes a la curva intersección de la superficie con planos en la dirección x.



Análogamente, $f_y = -2y$ nos entrega las pendientes de las rectas tangentes a la curva que resulta de intersectar la superficie y planos en la dirección y.

Las derivadas parciales para funciones de más de dos variables se definen de manera similar:

Si $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ es una función de n variables,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

Es la derivada parcial de f con respecto a la variable x_i que se denota también $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ o f_i o f_{x_i} o $D_i f$

Ejercicio: Calcule las derivadas parciales de:

1. $f(x, y, z) = z\ \mathrm{sen}(xy^2 + 2z)$
2. $f(x, y, z) = x\ e^y + ye^{2z} + z^2 e^x$
3. $w = e^{yz} + \ln(x^2 z)$

4. Demuestre que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ si $u = (x-y)(y-z)(z-x)$

Derivadas parciales de orden superior

Se llama derivada parcial de segundo orden de una función f a las derivadas parciales de sus derivadas parciales de primer orden.

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables hay 4 derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{denotada por} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{o} \quad f_{xx} \quad \text{o} \quad z_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{denotada por} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{o} \quad f_{yx} \quad \text{o} \quad z_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{denotada por} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{o} \quad f_{xy} \quad \text{o} \quad z_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{denotada por} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{o} \quad f_{yy} \quad \text{o} \quad z_{yy}$$

Ejercicio: Calcule las derivadas parciales de 2do. orden de :

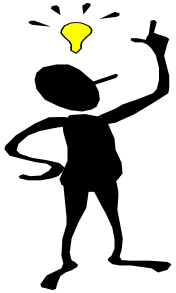
1. $f(x, y) = x^3\sqrt{y} + 5y\sqrt{x}$
2. $f(x, y) = e^{xy} + e^{2x-y}$
3. $z = x\,\mathrm{sen}\,y + y\cos x$

Ejercicio: Si $z = xy + y\ln(xy)$, demuestre que

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Teorema: **(Schwarz – Clairaut)** Si $z = f(x, y)$ es una función tal que las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ son continuas en un disco abierto D, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{en D.}$$



Este teorema también es aplicable cuando la función tiene tres o más variables siempre que las derivadas parciales de segundo orden sean continuas. Y si todas las derivadas parciales de tercer orden son continuas, el orden de derivación en sus derivadas parciales de tercer orden es irrelevante.

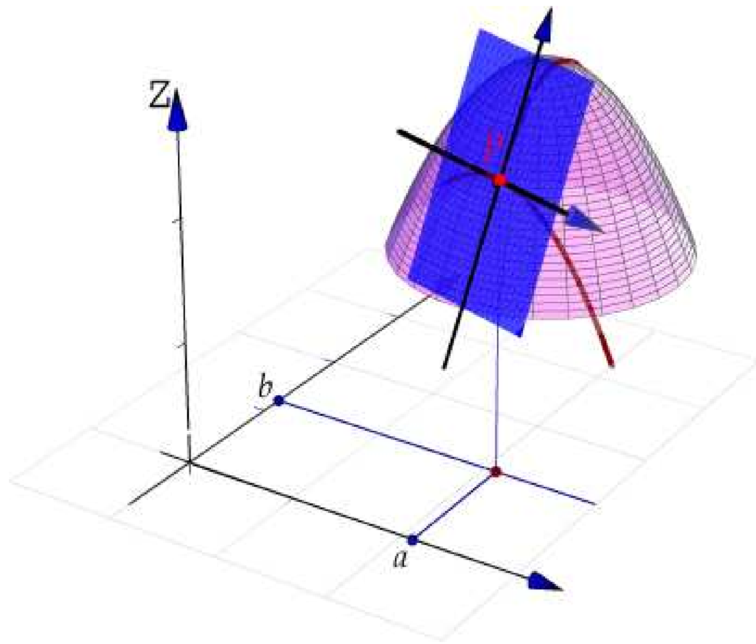
Ejercicio: Verifique que $f_{xyy} = f_{yyx}$ si $f(x, y, z) = e^{-x}\,\text{sen}(yz)$.

Ejercicio: Verifique que

a) La función $u = e^{-a^2k^2t}\,\text{sen}\,kx$ es una solución de la ecuación de conducción de calor $u_t = a^2u_{xx}$.

b) La función $u = \text{sen}(x - at) + \ln(x + at)$ es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2u_{xx}$

Planos tangentes: Supongamos que una superficie S tiene ecuación z = f(x, y), con f función cuyas derivadas parciales son continuas. Si $P(x_0, y_0, z_0)$ es un punto sobre S, el plano tangente a S en P es el formado por todas las rectas tangentes en P a las curvas que están sobre S y que pasan por P; es el plano que más aproxima a S cerca de P.



Una ecuación de este plano tangente es:

$$z - z_o = f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o)$$

Ejemplo: La ecuación del plano tangente a la superficie dada por $z = x^2 + 4y^2$ en el punto $P(2, 1, 8)$ es

$$z - 8 = z_x(2, 1)\,(x - 2) + z_y(2, 1)\,(y - 1)$$

es decir, $z - 8 = 4(x - 2) + 8(y - 1)$

o bien, $4x + 8y - z = 8$

Si la superficie S está definida de manera implícita por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, entonces la ecuación del plano tangente en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S es,

$$F_x(P)(x - x_o) + F_y(P)(y - y_o) + F_z(P)(z - z_o) = 0$$

Diferenciabilidad

Recordemos que para funciones de una variable y = f(x),

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \textbf{: incremento de y}$$

$$\mathbf{dy} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} \quad \textbf{: diferencial de y}$$

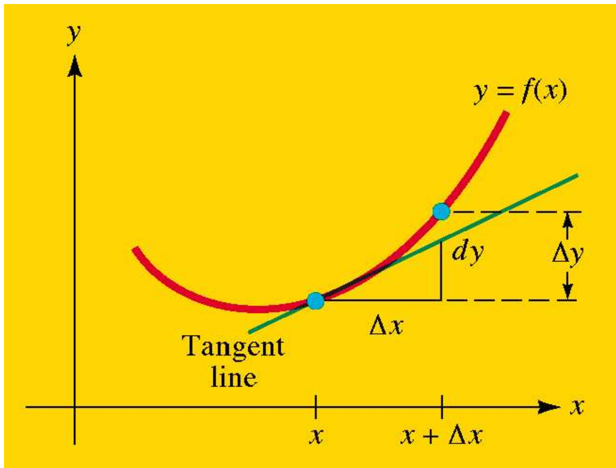
$$\Delta \mathbf{y} - \mathbf{dy} \quad \to \quad \mathbf{0} \quad \textbf{cuando } \Delta \mathbf{x} \quad \to \quad \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{dy} + \varepsilon \Delta \mathbf{x}, \quad \textbf{donde } \varepsilon \to \mathbf{0} \quad \textbf{cuando } \Delta \mathbf{x} \to \mathbf{0}$$

Y para funciones de una variable y = f(x), la diferenciabilidad de f en x significa la existencia de f ’(x) que equivale a que la gráfica de f tiene una tangente no vertical en (x, f(x)):

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

es la recta tangente en (a, f(a)).



Para una función de 2 variables z = f(x, y) parece natural que la diferenciabilidad corresponda a la existencia de un plano tangente. Esto requiere más que la sola existencia de las derivadas parciales, puesto que ellas reflejan el comportamiento de f únicamente en dos direcciones.

Sea z = f(x, y) función de 2 variables; entonces

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \quad : \text{ incremento de } z$$

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y): \text{ diferencial de } z$$

Si tomamos $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$, entonces

$$dz = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)$$

Comparemos esta ecuación con la ecuación del plano tangente a la superficie z = f(x, y) en P(a, b. f(a, b)), bajo la suposición que las derivadas parciales son continuas:

$$z - f(a,b) = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)$$

Por lo tanto podemos concluir que dz representa el cambio de altura del plano tangente, en tanto Δz representa el cambio en la altura de la superficie z = f(x, y) cuando (x, y) cambia de (a, b) a $(a+\Delta x, b+\Delta y)$.

Definición: La función z = f(x, y) es diferenciable en (a, b) si Δz puede expresarse en la forma:

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon\,\Delta x + \eta\,\Delta y,$$

donde ε y η son funciones de Δx y Δy que tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Esto es,

$$\Delta z = dz + \varepsilon\,\Delta x + \eta\,\Delta y, \text{ es decir, } \Delta z \approx dz$$

En consecuencia,

(1) La función f es diferenciable en (a, b) si la diferencial dz es una buena aproximación de Δz.

(2) Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b) y el plano tangente es una buena aproximación a la gráfica de f cerca de (a, b).

Observaciones:

1) Si f es diferenciable en (x_0, y_0), f es continua en (x_0, y_0).

2) Si f es diferenciable en (x_0, y_0), f_x y f_y existen en (x_0, y_0).

3) El recíproco de 2) es falso, esto es, el que f_x y f_y existan en (x_0, y_0) no implica que f sea diferenciable en (x_0, y_0).

4) Si f_x y f_y existen y son continuas en (x_0, y_0), entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

5) La diferencial y la diferenciabilidad pueden definirse de manera análoga para funciones de más de dos variables:

Si $w = f(x, y, z)$, $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy\, \frac{\partial w}{\partial z}dz$ es la diferencial total de w. Y

$$\Delta w = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

es el incremento de w.

Aplicaciones – Aproximación por diferenciales

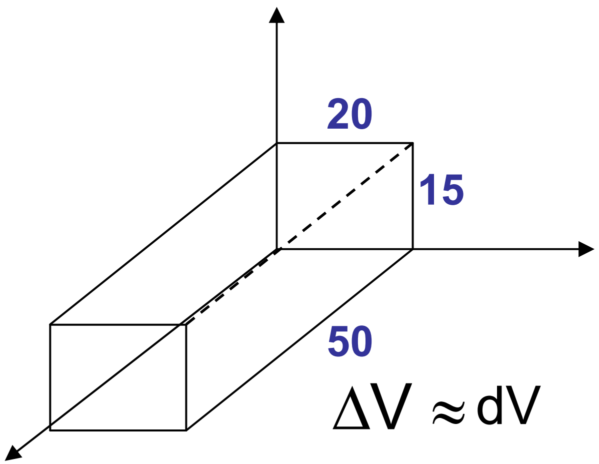
Sea $z = 5x^2 + y^2$; determinemos la diferencial dz y comparemos los valores de Δz y dz si (x, y) cambia de (1, 2) a (1.05, 1.99).

$$dz = 10x\, dx + 2y\, dy, \quad dx = \Delta x = 0.05, \quad dy = \Delta y = -0.01$$

$$dz = (10)(1)(0.05) + (2)(2)(-0.01) = 0.46$$

$$\Delta z = f(1.05\ ,\ 1.99) - f(1, 2) = 9.4726 - 9 = 0.4726 \approx dz$$

Problema: Se miden las dimensiones de una caja rectangular con una cota de error de $\pm$ 0,1mm. Las medidas, en centímetros, son 50, 20, 15. Mediante la diferencial estime el error al calcular el volumen de la caja.



Volumen $V(x, y, z) = xyz$

$dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

Aquí, $dx = dy = dz = \pm 0{,}01$ cm.

$$\Delta V \approx dV$$

$$= (15)(20)(\pm 0{,}01) + (50)(20)(\pm 0{,}01) + (50)(15)(\pm 0{,}01)$$

$$= (300 + 1000 + 750)(\pm 0{,}01) = \pm 20{,}5 \text{ cm}^3$$

El error en las medidas puede llevar a un error de $\pm$ 20,5 cm^3 en el volumen.

La Regla de la cadena

Teorema 1: Sean $x = g(t)$, $y = h(t)$ funciones derivables en t y $z = f(x, y)$ diferenciable en $(g(t), h(t))$. Entonces $z = f(g(t), h(t))$ es derivable en t y se tiene que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo: Calculemos $\frac{dz}{dt}$ si $z = x^2y^3$, $x = 2t$, $y = t^2$.

$$\frac{dz}{dt} = (2xy^3)2 + (3x^2y^2)(2t) = 32t^7$$

En este caso podemos observar que $z = x^2y^3 = (2t)^2(t^2)^3 = 4t^8$ y que efectivamente $\frac{dz}{dt} = 32\,t^7$. Pero no es común hacer este procedimiento aún cuando z es, finalmente, una función de t.

El teorema anterior se extiende a funciones de más variables. Por ejemplo, si $w = x^2y + y + xz$, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t^2$,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= -2\operatorname{sen}^2 t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t + \cos^3 t + \cos t + 2t \cos t$$

Teorema 2: Sean $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$ funciones cuyas primeras derivadas parciales existen en (s, t) y $z = f(x, y)$ función diferenciable en $(g(s, t), h(s, t))$. Entonces $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ existen y están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Teorema 3 (caso general): Sea u función derivable de las n variables $x_1, \ldots, x_n$, en donde cada x_k es una función de m variables $t_1, \ldots, t_m$, tales que las derivadas parciales $\frac{\partial x_k}{\partial t_i}$ existen, para todo k = 1, …., n y i = 1, …., m. Entonces para cada i = 1, …., n se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Ejercicios:

1) Determine $\frac{\partial w}{\partial t}$ si $w = e^{xy+z}$, $x = s + 2t$, $y = s - t$, $z = t^2$.

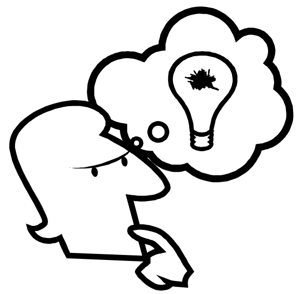
2) Si $w = x^2y + z^2$ $x = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$, $z = r\cos\phi$

   determine $\left.\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|_{r=2,\ \theta=\pi,\ \phi=\pi/2}$

3) Si $w = f(r - s, s - t, t - r)$, demuestre que $\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$.

4) Si $z = f(x, y)$ es de clase C^2 (es decir, z tiene derivadas de segundo orden continuas) y $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

5) La presión P (en KPa/seg), el volumen V (en lts.) y la temperatura T (en Kelvins) de un mol de un gas ideal están relacionados mediante la ecuación $PV = 8{,}31\,T$. Calcule la tasa en la que la presión cambia cuando la temperatura es de 300 K y se incrementa a una tasa de 0,1 K/seg y el volumen es de 100 lts y se incrementa a una tasa de 0,2 lts/seg.



Diferenciación de funciones implícitas

Supongamos que F(x, y) = 0 define implícitamente a y como función derivable de x (es decir, y = f(x) y F(x, f(x)) = 0). Si F es diferenciable, la Regla de la cadena nos proporciona una manera de obtener $\frac{dy}{dx}$ puesto que,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

de donde sigue que $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ siempre que $F_y(x, y) \neq 0$

Observación: El suponer que F(x, y) = 0 define implícitamente a y como función derivable de x no es una trivialidad; existen teoremas que entregan las condiciones bajo las cuales esta suposición es válida.

Si F(x, y, z) = 0 define implícitamente a z como función diferenciable de x e y, con F función diferenciable, entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{siempre que } F_z(x,y,z)\neq 0$$

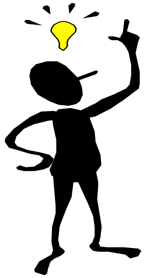
Análogamente se obtiene, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$ si $F_z(x,y,z)\neq 0$

Ejercicio: Calcule

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $x\ln(y)+y^2z+z^2=3$

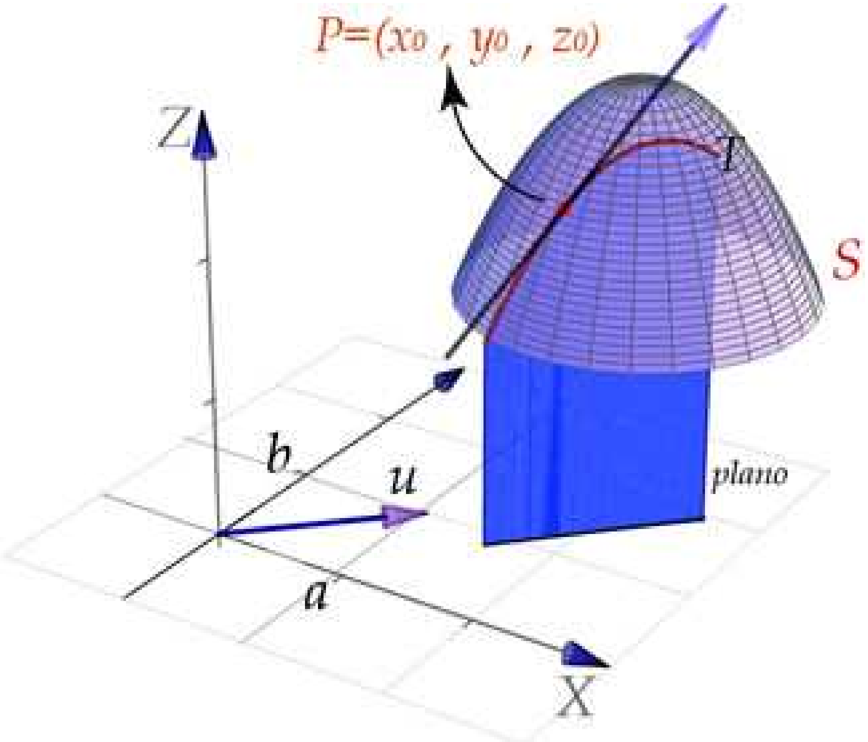
b) $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ si $y^{1-x}+z\,\mathrm{sen}(x)=0$

Derivadas direccionales – Vector gradiente



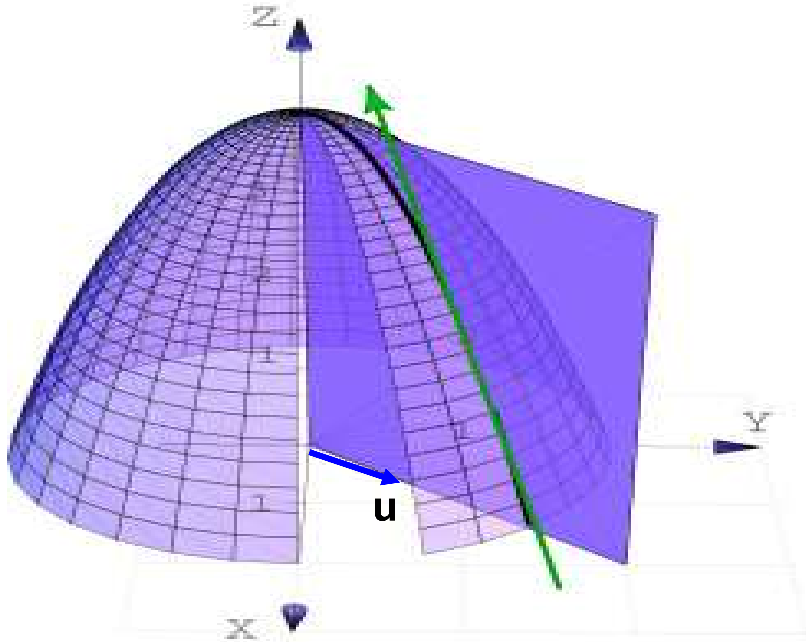
Sea $z = f(x, y)$ función de dos variables. Las derivadas parciales f_x y f_y representan las tasas de cambio de z en las direcciones de *x* y de *y*, es decir, en las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$.

Si se quiere determinar la tasa de cambio de z en (x_o, y_o) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (a, b)$, consideramos el punto $P(x_o, y_o, z_o)$ sobre la superficie S dada por $z = f(x, y)$. El plano vertical que pasa por P en la dirección u cruza a S en una curva C; la pendiente de la recta tangente a C en P es la tasa de cambio que se busca y se llama derivada direccional de f en la dirección $\mathbf{u}$.



Derivada direccional
en P en la dirección u

Derivada direccional



Definición: La derivada direccional de la función de varias variables f en el punto P en la dirección del vector unitario u es:

$$D_u f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + hu) - f(P)}{h}$$

siempre que este límite exista.

Si la función f tiene dos variables, el punto P es $P(x_o, y_o)$ y el vector unitario es $u = (a, b)$,

$$D_u f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + ha, y_o + hb) - f(x_o, y_o)}{h}$$

Además, observe que,

$$D_i f(P) = f_x(P) \qquad y \qquad D_j f(P) = f_y(P)$$

El siguiente Teorema nos proporciona una manera de calcular la derivada direccional sin tener que usar el límite:

Teorema: Si $z = f(x, y)$ es función diferenciable de x y de y, entonces f tiene derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $u = (a, b)$ y se tiene que:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

En efecto, definamos la función g por $g(h) = f(x_o+ha),\ y_o+hb)$; entonces

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + ha, y_o + hb) - f(x_o, y_o)}{h} = D_u f(x_o, y_o)$$

Por otra parte, si $x = x_o+ ha$, $y = y_o+ hb$, entonces $g(h) = f(x, y)$ y

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

$$\Rightarrow g'(0) = D_u f(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o)\, a + f_y(x_o, y_o)\, b$$

Observación: Si el vector unitario u forma un ángulo ϑ con el eje positivo X, entonces podemos escribir $u = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$ y se tiene,

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\cos\vartheta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\vartheta$$

Ejercicios:

1. Considere $f(x, y) = 4x^2 - xy + 3y^2$. Determine la derivada direccional de f en P(2, -1) en la dirección del vector v = 4i + 3j.
2. Calcule la derivada direccional $D_u f(P)$ si $f(x, y) = y^x$ y u es el vector unitario $u = (\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$. ¿Cuál es el valor de $D_u f(P)$ si P = (1, 2)?
3. Determine $D_v g(P)$ si g(x, y, z) = xy sen z, P(1, 2, $\frac{\pi}{2}$) y v es el vector v = i + 2j +2k.

Definición: Sea f función de varias variables cuyas derivadas parciales existen. El gradiente de f, denotado por ∇f , es la función vectorial definida por

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

Por ejemplo, si f es la función $f(x, y) = e^{xy} + \cos x - \operatorname{sen} y$, el gradiente de f es $\nabla f(x, y) = (ye^{xy} - \operatorname{sen} x\ ,\ xe^{xy} - \cos y)$ y el gradiente de f en (π, 0) es $\nabla f(\pi, 0) = (0,\ \pi - 1)$.

Si g(x, y, z) = x ln(x + y + z) ¿cuál es el gradiente de g?

Ejercicio:

1. Encuentre ∇f si $f(x, y, z) = x^2 y e^{x - z}$
2. Determine $\nabla f(P)$ si $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ y $P(1, \frac{\pi}{4})$.

Observaciones:

(1) El gradiente ∇ es un operador lineal, es decir,

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \quad \text{y} \quad \nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f,\ \alpha \in \Re$$

Además, $\nabla(f\,g) = g\,\nabla f + f\,\nabla g \quad \text{y} \quad \nabla(\frac{f}{g}) = \dfrac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2}$

(2) Con el gradiente podemos reformular la derivada direccional:

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \bullet u$$

(3) En muchos problemas interesa conocer en qué dirección la función f crece más rápidamente; esta dirección se llama dirección de máxima pendiente y está dada por el gradiente:

Teorema: Sea f función diferenciable. El valor máximo de la derivada direccional $D_u f(P)$ es $\|\nabla f(P)\|$ y se presenta cuando u tiene la misma dirección de $\nabla f(P)$.

Ejercicio:

1. Si f es la función $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$, determine la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $P(\frac{5\pi}{6}, 0)$. ¿Cuál es la máxima razón de cambio en esa dirección?
2. Determine la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ en el punto P(2, -1, 1) y el máximo valor de la derivada $D_u f(P)$.
3. Demuestre que una función diferenciable f decrece más rápidamente en P en la dirección opuesta al vector gradiente.
4. La temperatura en el punto P(x, y) de una lámina metálica está dada por $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Determine la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en el punto P(3, 4).

Plano tangente y recta normal a una superficie de nivel

Si $f : \mathbf{D} \subseteq \Re^{3} \rightarrow \Re$, los conjuntos $S_k = \{(x, y, z) \ / \ f(x, y, z) = k\}$ son las superficies de nivel de la función f, es decir,

$$P(x_o, y_o, z_o) \in S_k \Leftrightarrow f(x_o, y_o, z_o) = k$$

Sea S una superficie de nivel de f, $P(x_o, y_o, z_o) \in S$ y C una curva sobre S que pasa por el punto P. Sabemos que C puede ser descrita por una función vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Como C está en S, $f(x(t), y(t), z(t)) = k$, para todo t parámetro real y k constante.

Si x, y, z son funciones diferenciables de t y f es diferenciable, la Regla de la cadena asegura que,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}\right)\bullet\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dx}{dt}\right)=0$$

$$\Rightarrow \nabla f \bullet r'(t) = 0$$

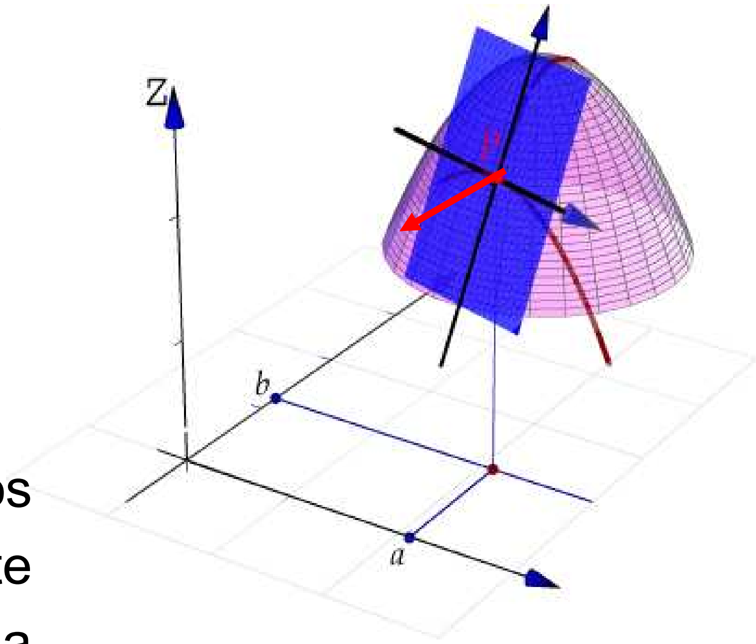
$$\Rightarrow \nabla f(P)\bullet r'(t_o) = 0 \qquad \text{si} \quad P = r(t_o)$$

Esto demuestra que "El vector gradiente en P es perpendicular al vector tangente $r'(t_o)$ a cualquier curva que esté sobre S y que pase por P".

Si $\nabla f(P) \neq 0$, el plano tangente a S en $P(x_o, y_o, z_o)$ es el plano que pasa por P y es normal al vector $\nabla f(P)$; su ecuación es:

$$f_x(P)(x-x_o)+f_y(P)(y-y_o)+f_z(P)(z-z_o)=0$$

La recta normal a la superficie S en P es la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente, es decir, tiene vector director $\nabla f(P)$.



Observación:

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, la superficie correspondiente a la gráfica de f podemos interpretarla como S_o, superficie de nivel con $k = 0$ de la función $F(x, y, z) = f(x, y) – z$.

La ecuación del plano tangente a S_o en $P(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ es

$$f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o) - (z - z_o) = 0$$

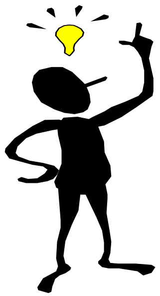
Ejercicios:

1. Grafique la curva de nivel del paraboloide $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ que pasa por P(2, 1). Determine el vector $\nabla z(P)$ y grafíquelo con su punto inicial en P.
2. Determine las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4$ en el punto P(1, 0, 1).
3. Encuentre las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que sean paralelos al plano x + 4y + 6z = 0.

Extremos de funciones reales de varias variables

Sea f función real con dominio $D \subseteq \Re^n$. Se dice que

- f tiene o alcanza máximo local (o relativo) en el punto $x_o \in D$ si $f(x_o) \geq f(x),\ \forall x \in V_\in(x_o)$. El número $f(x_o)$ es un valor máximo local de f.
- f tiene o alcanza mínimo local (o relativo) en el punto $x_o \in D$ si $f(x_o) \leq f(x),\ \forall x \in V_\in(x_o)$. El número $f(x_o)$ es un valor mínimo local de f.



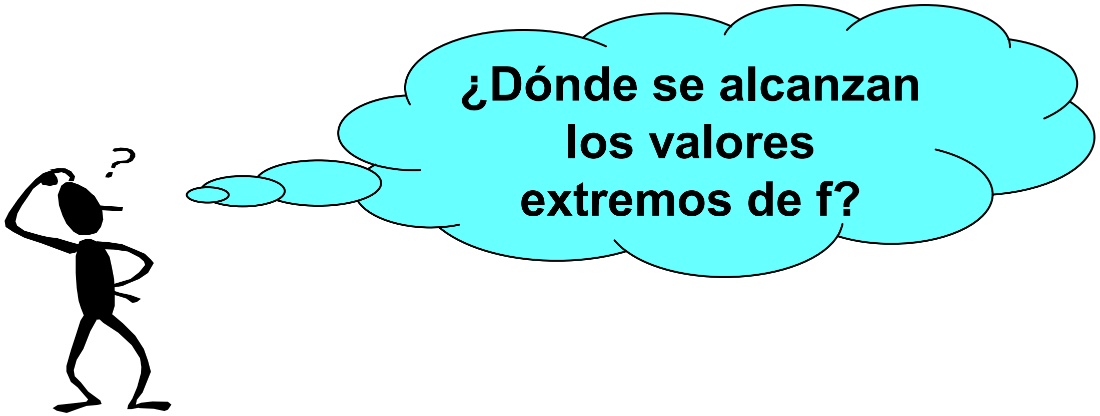
Los valores extremos de f son los valores máximos o mínimos locales de f.

Los puntos críticos de f en el dominio abierto D son puntos $p_o \in D$ de dos tipos:

- Puntos estacionarios: los que verifican $\nabla f(p_o) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o) = 0, \ \forall i$$

- Puntos singulares: en este caso, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o)$ no existe, para algún i, es decir, f no es diferenciable en p_o.



Teorema: Si f alcanza un valor extremo en p_o, entonces p_o debe ser un punto crítico de f.

Por lo tanto, si p_o no es un punto crítico de f, entonces f no alcanza un valor extremo en p_o.

Demostremos el teorema para el caso $z = f(x, y)$ función de dos variables.

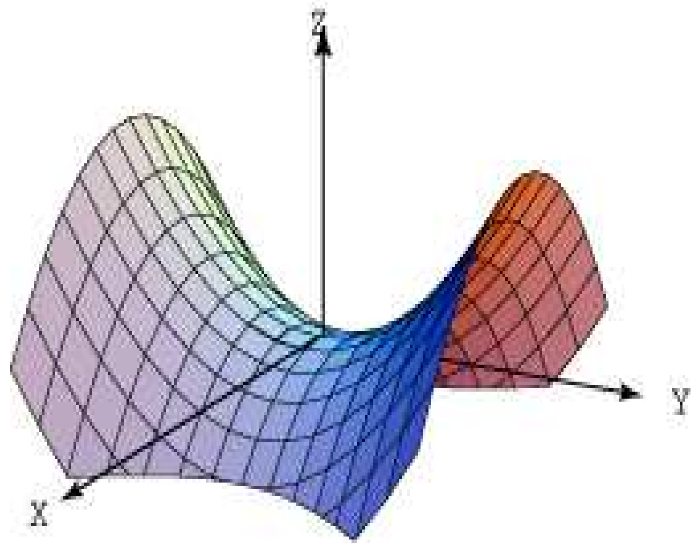
Supongamos que f tiene un valor extremo en $p_o = (a, b)$ y definamos la función g por $g(x) = f(x, b)$.

Entonces g tiene un valor extremo en a; luego $g'(a) = 0$ o bien $g'(a)$ no existe. Pero $g'(a) = f_x(a, b)$; luego $f_x(a, b) = 0$ o bien $f_x(a, b)$ no existe.

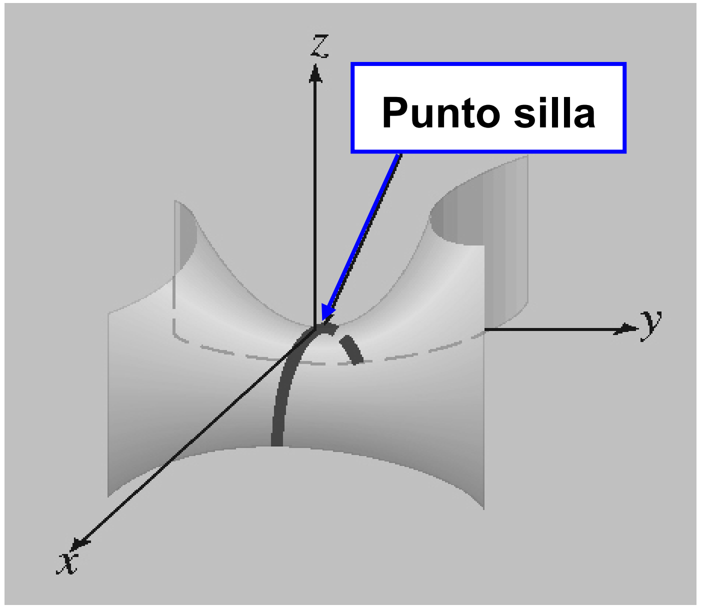
De manera análoga con $g(y) = f(a, y)$ se obtiene $f_y(a, b) = 0$ o $f_y(a, b)$ no existe.

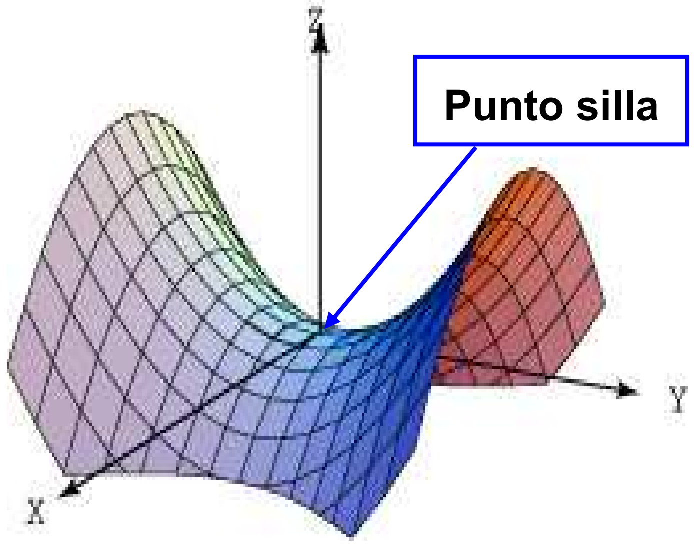
Gráficamente, si $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$ la ecuación del plano tangente se reduce a $z - z_o = 0$, es decir, si la gráfica de f tiene un plano tangente en un extremo local, este debe ser horizontal.

Observación: No todos los puntos críticos originan valores extremos. Por ejemplo, la función $f(x,y) = y^2 - x^2$ tiene un único punto crítico P(0, 0), pero f(0, 0) = 0 no es un valor extremo de f puesto que en una vecindad de 0, la función f toma valores positivos y valores negativos.



Definición: Un punto $p_o \in D$ se llama punto silla si dado $\varepsilon > 0$, la vecindad $V_\varepsilon(p_o)$ contiene puntos P tales que $f(p_o) > f(P)$ y puntos Q tales que $f(p_o) < f(Q)$.





Condiciones suficientes para valores extremos

Supongamos que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en una vecindad de p_o y que $\nabla f(p_o) = 0$.

Caso z = f(x, y) función de dos variables:

Denotemos por D al determinante de la matriz Hessiana de la función f (Hessiano), esto es,

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(p_o) & f_{xy}(p_o) \\ f_{yx}(p_o) & f_{yy}(p_o) \end{vmatrix} = f_{xx}(p_o) f_{yy}(p_o) - f_{xy}^2(p_o)$$

- $D > 0 \ \wedge \ f_{xx}(p_o) < 0 \ \Rightarrow$ f alcanza máximo local en p_o
- $D > 0 \ \wedge \ f_{xx}(p_o) > 0 \ \Rightarrow$ f alcanza máximo local en p_o
- $D < 0 \ \Rightarrow$ p_o es un punto silla
- $D = 0 \ \Rightarrow$ no hay conclusión

Observe que si D > 0, $f_{xx}(p_o)$ y $f_{yy}(p_o)$ tienen el mismo signo.

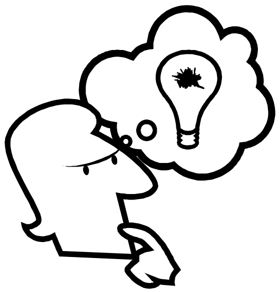
Caso z = f(x, y) función de dos variables:

Calculamos los determinantes,

$$D_1 = f_{xx}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \quad y \quad D_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

- Si $D_1(p_o)$, $D_2(p_o)$ y $D_3(p_o)$ son positivos, la función f alcanza mínimo local en p_o.
- Si $D_1(p_o) < 0$, $D_2(p_o) > 0$ y $D_3(p_o) < 0$, la función f alcanza máximo local en p_o.
- En cualquier otro caso no hay conclusión.

Ejercicio: Determine los valores extremos y puntos silla de



1. $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$
2. $f(x, y) = 4x^3 + 6y^2 - 48xy + 9$
3. $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 1}{2} - x(x^2 + y^2)$
4. $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$
5. $f(x, y) = e^x \cos y$
6. $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2$

Ejercicio: Determine la distancia mínima entre el origen y la superficie $z^2 = x^2 y + 4$.

Valores extremos condicionados
Multiplicadores de Lagrange

En muchas situaciones de la vida real, los problemas de optimización están sujetos a restricciones. Algunos de estos problemas es posible resolverlos a través del método de los Multiplicadores de Lagrange:

Supongamos que queremos maximizar o minimizar la función diferenciable $f : D \subseteq \Re^n \to \Re$ restringida al conjunto de nivel $S = \{x \in \Re^n \ / \ g(x) = 0\}$ con $g : D \subseteq \Re^n \to \Re$ función diferenciable. Si $\nabla g(p_o) \neq 0,\ p_o \in S$ y f restringuida a S tiene un máximo o mínimo local en p_o, entonces existe un número λ tal que $\nabla f(p_o) = \lambda \nabla g(p_o)$.

El punto p_o es un extremo condicionado de f y el número λ se llama Multiplicador de Lagrange.

El teorema precedente permite construir la función $F = f - \lambda g$, para luego encontrar sus puntos críticos, esto es, los puntos p_o tales que $\nabla F(p_o) = 0$ o equivalente, $\nabla f(p_o) = \lambda \nabla g(p_o)$, en los cuales se podrán encontrarán los extremos condicionados de f.

¿Cómo determinar el tipo de extremo condicionado?

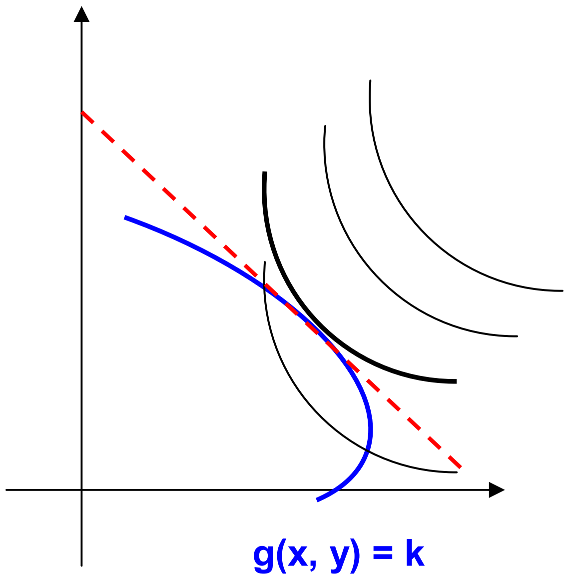
- Si los puntos críticos de la función de Lagrange F son dos, una simple evaluación nos indica que uno es máximo y el otro mínimo.
- En otros casos se recurre a consideraciones geométricas.
- En general, se emplea el Hessiano de la función F, pero los criterios mencionados antes cambian. En particular, si f es una función de dos variables y $H_F(p_o)$ es el Hessiano, entonces

$$H_F(p_o) > 0 \;\Rightarrow\; p_o \text{ es máximo condicionado}$$
$$H_F(p_o) < 0 \;\Rightarrow\; p_o \text{ es mínimo condicionado}$$
$$H_F(p_o) = 0 \;\Rightarrow\; \text{no hay conclusión}$$

Buscar los extremos de z = f(x, y) cuando el punto (x, y) está en la curva de nivel g(x, y) = k significa encontrar el mayor (o menor) valor de C tal que f(x, y) = C intersecte a g(x, y) = k.

Esto ocurre cuando estas curvas sólo se tocan en el punto $P(x_o, y_o)$, o sea cuando tienen una recta tangente común, en cuyo caso las rectas normales en P coinciden y, en consecuencia,

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P), \text{ algún } \lambda \in \Re$$



Ejemplo: Encontrar los valores extremos de la función

$f(x,y) = y^2 - x^2$ sobre la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

En este caso la restricción es $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$ y se resuelve:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - \frac{1}{2}\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

➢**solve({-2*x=0.5*z*x, 2*y=2*z*y, 0.25*x^2+y^2=1}, {x,y,z});**

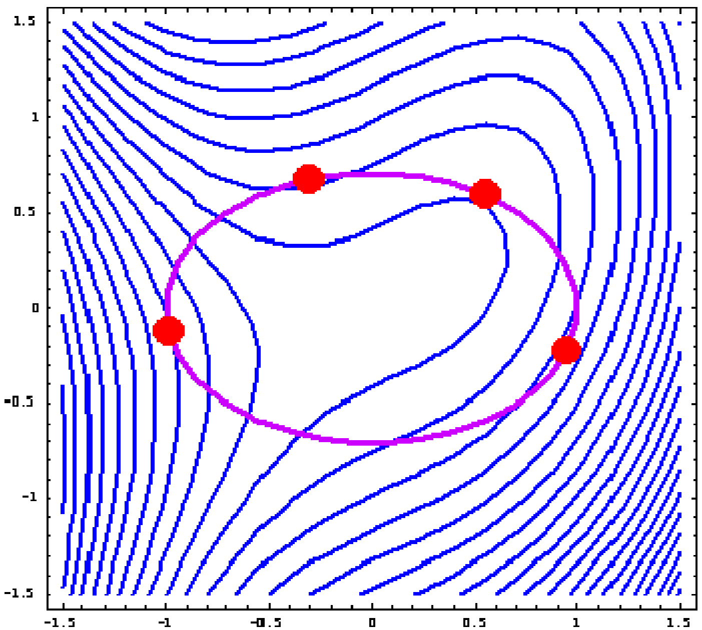
Así, se encuentran los posibles valores extremos de f:

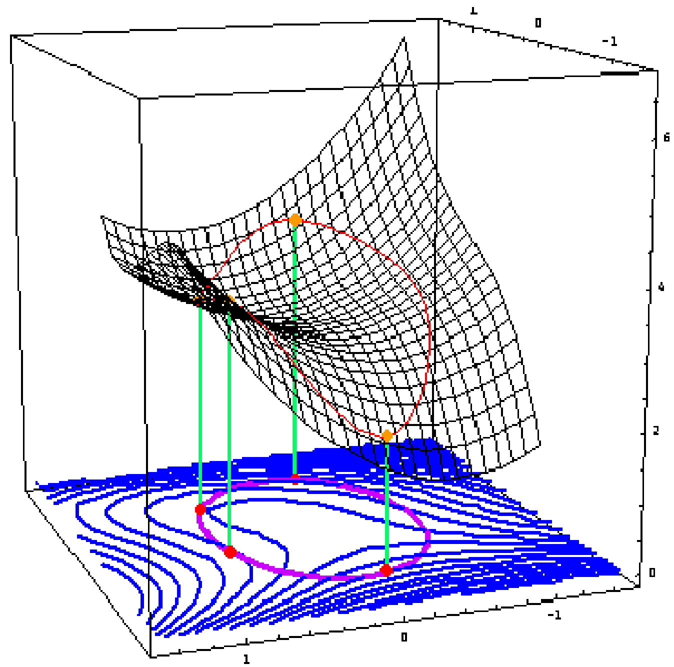
$P_1(2, 0)$, $P_2(-2, 0)$, $P_3(0, 1)$ y $P_4(0, -1)$.

La evaluación $f(P_1) = -4$, $f(P_2) = -4$, $f(P_3) = 1$ y $f(P_4) = 1$, nos lleva a concluir que el valor máximo de f es 1 que se alcanza en P_3 y en P_4. Y el valor mínimo de f es -4 que se alcanza en los puntos P_1 y P_2.

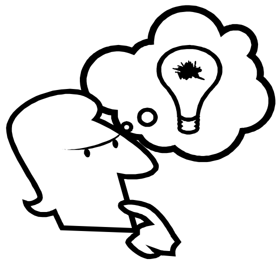
El primer gráfico muestran las curvas de nivel de la superficie $f(x,y)=x^3-xy+y^2+3$ intersectadas con la elipse $x^2+2y^2=1$.

El gráfico siguiente muestra donde se alcanzan los extremos de f con la condición que (x, y) esté en la elipse.





Ejercicio: Determine el mínimo de $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 3y$ con la condición $x^2 - y = 1$.



Problema: Una línea aérea no permitirá el transporte de bultos de longitud y de perímetro superior a 108 cms. Determine la longitud L y el radio r de un paquete cilíndrico transportable con volumen máximo.

Problema: Un fabricante estima una función de producción

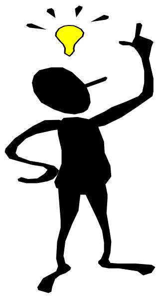
$$f(x,\ y) = 100\, x^{3/4} y^{1/4}$$

donde x es el número de unidades de trabajo, a US$150 la unidad e y es el número de unidades de capital, a US$250 por unidad. El costo total de trabajo y capital se limita a US$50.000. Determine el nivel de producción máximo de este fabricante.

La importancia del Multiplicador de Lagrange

Supongamos que M es el valor máximo (o mínimo) de f(x, y) sujeto a la restricción g(x, y) = k. El multiplicador de Lagrange λ es la razón de cambio de M con respecto a k, es decir, $\lambda = \frac{dM}{dk}$.

Los economistas llaman al multiplicador de Lagrange que se obtiene en una función de producción "productividad marginal del dinero".



En el último problema, $\lambda = -\frac{1}{2}(250)^{-1/4}(50)^{1/4} \approx -0{,}334$ lo que significa que por cada dólar adicional gastado en la producción, pueden producirse 0, 334 unidades adicionales del producto.

Generalización del Método de los Multiplicadores de Lagrange

El método es general en el sentido que si hay más restricciones o condiciones él también es aplicable.

Por ejemplo, si se quiere maximizar o minimizar la función f sujeto a las restricciones $g_1(X) = 0, \ldots\ldots, g_t(X) = 0$, los posibles extremos condicionados P surgen de resolver:

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \ldots\ldots + \lambda_t \nabla g_t(P) \\ g_1(P) = 0, \ldots\ldots g_t(P) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio: Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y, z) = x + 2y$ sobre la curva intersección del plano $x + y + z = 1$ con el cilindro $y^2 + z^2 = 4$.