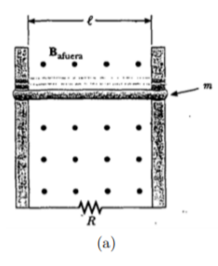
guia-6_Advance

lunes, 30 de agosto de 2021 10:12

P1. Inducción

Pueden encontrar videos útiles sobre este tema en este link:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLnA7OD6pPVGy-XuqKGWhXuIiUIEMqAsXA

a) Un alambre horizontal puede deslizarse libremente sobre los rieles verticales de un armazón conductor, como se muestra en la figura 2a. El alambre tiene masa m y longitud l, y la resistencia del circuito R. Si un campo magnético uniforme se dirige perpendicularmente al armazón, ¿cuál es la rapidez terminal del alambre cuando éste cae bajola fuerza de gravedad?
Resp: $v_t = \frac{mgR}{B^2l^2}$.



(a)

Solución:

$F_B = IlB$, mg, $v = ?$

$$\mathcal{E} = Blv \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

$$F_{R_y} = IlB - mg = \frac{B^2l^2}{R}v - mg = -ma = -m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2l^2v}{Rm} = g$$

$$\lambda + \frac{B^2l^2}{Rm} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{B^2l^2}{Rm}$$

$$v_h = C e^{-\frac{B^2l^2}{Rm}t}$$

$$v_p = a + bt$$
$$v_p' = b$$
$$b + \frac{B^2l^2}{Rm}(a+bt) = g$$
$$b + \frac{B^2l^2}{Rm}a + \frac{B^2l^2}{Rm}bt = g$$
$$b = 0,\ a = \frac{gRm}{B^2l^2}$$
$$\therefore v_p = \frac{Rmg}{B^2l^2}$$

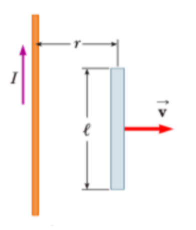
$$\therefore v = Ce^{-\frac{B^2l^2}{Rm}t} + \frac{Rmg}{B^2l^2}$$

Cuando $t \to \infty$, $v = \frac{Rmg}{B^2l^2}$

b) Una barra conducta se mueve a una velocidad constante v perpendicular a un largo alambre recto que conduce una corriente I como se muestra en la figura 1b. Muestre que la magnitud de la fem generada entre los extremos de la barra es:

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} l$$

En este caso observe que la fem disminuye con el aumento de r, como debería esperarse.



(b)

Solución:

La fem inducida es $\mathcal{E} = Blv$
donde:
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
$$\therefore \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l v$$

Otra forma:

$$d\phi_B = B\,dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\,dr$$
$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r}\frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r}v = -\mathcal{E}$$
$$\therefore |\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi r}$$

c) Se introduce un imán hacia el centro de la bobina de 4 vueltas de la figura 1c. El flujo magnético a través de la bobina cambia de 0,32 Wb a 0,52 Wb en 0,01 s. La bobina tiene una resistencia total de $R = 20\Omega$.

1) Determine la magnitud de la fem inducida.
2) Determine la magnitud de la corriente inducida.
3) Determine el sentido de flujo de la corriente inducida en la espira en la vista lateral de esta.

Resp 1: 80 V
Resp 2: 4 A.
Resp 3: Sentido antihorario.

(c)

Solución:

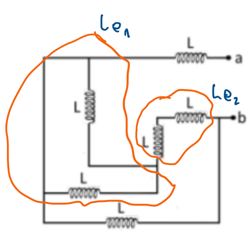
1) $\mathcal{E} = -4\,\frac{0{,}32 - 0{,}52}{0{,}01} = 80\,V$

2) $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{80}{20} = 4A$

3) I

P2. Inductancia

a) En la red de inductancias de la figura se tiene que $L = 140$ mH. Determine la inductancia equivalente entre los puntos a y b.
Resp: $L_{eq} = 240$ mH.



(a)

Solución:

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

$$L_{e_1} = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{1}{L}} = \frac{L}{2},\quad L_{e_2} = L + L = 2L,\quad L_{e_3} = L_{e_1} + L_{e_2} = \frac{L}{2} + 2L = \frac{5L}{2}$$

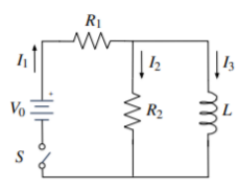
$$L_{e_4} = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{1}{L_{e_3}}} = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{2}{5L}} = \frac{5}{7}L$$

$$L_e = L + L_{e_4} = \frac{12}{7}L = 240\text{ mH}$$

b) Considere el circuito de la figura 2b, donde el interruptor S ha estado abierto un tiempo muy largo. Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 que se muestran en la figura en las siguientes situaciones:

1) Instantáneamente después de cerrar el interruptor S.
2) Un largo tiempo después de conectar el interruptor.

Resp: 1) $I_1 = I_2 = \frac{V_0}{R_1+R_2}$; $I_3 = 0$.
Resp: 2) $I_1 = I_3 = \frac{V_0}{R_1}$; $I_2 = 0$.



(b)

Solución:

1) $I_1 = I_2 = \frac{V_0}{R_1+R_2}$; $I_3 = 0$

2) $I_2 = 0$: $I_1 = I_3$

$$L\frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = V_0$$
$$\lambda + \frac{R_1}{L} = 0$$
$$I_h = Ce^{-\frac{R_1}{L}t}$$

$$I_p = At + B$$
$$I_p' = A$$
$$\therefore LA + R_1(At+B) = V_0$$
$$LA + BR_1 + AR_1t = V_0$$
$$A = 0,\ B = \frac{V_0}{R_1}$$
$$\therefore I_p = \frac{V_0}{R_1}$$

$$\Rightarrow I_1 = I_h + I_p = Ce^{-\frac{R_1}{L}t} + \frac{V_0}{R_1}$$

En $t = 0$, $I_1 = 0$:

$$I_1(0) = C + \frac{V_0}{R_1} = 0 \Rightarrow C = -\frac{V_0}{R_1}$$
$$\therefore I_1 = \frac{V_0}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$$

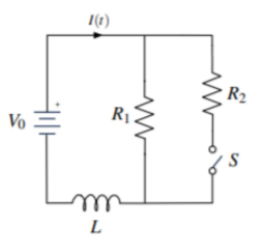
Cuando $t \to \infty$ se tiene:

$$I_1 = \frac{V_0}{R_1}$$

c) En el circuito de la figura 2b la batería está conectada hace un tiempo infinito con el interruptor S abierto. En $t = 0$ el interruptor se cierra. Considere $V_0 = 120$ V, $R_1 = R_2 = 30\ \Omega$ y $L = 50$ mH.

1) Determine la corriente I en $t = 0$, es decir, justo después de conectar el interruptor.
2) Determine la corriente I para un tiempo infinito luego de conectar el interruptor.
3) Encuentre una expresión $I(t)$ para la corriente mostrada en función del tiempo.

Resp: 1) 4 *A.*
Resp: 2) 8 *A.*
Resp: 3) $8 - 4e^{-300t}$ *A.*



(c)

guia-6_Advance

Solución:

PREVIO:
Supongamos que S está abierto:

$$L\frac{dI}{dt} + R_1 I = V_0$$
$$L\frac{dI}{dt} = -(R_1 I - V_0)$$
$$\frac{dI}{R_1I - V_0} = -\frac{dt}{L}$$
$$\frac{1}{R_1}\ln|R_1I - V_0| = -\frac{t}{L} + cte$$

$$\ln|R_1I - V_0| = -\frac{R_1}{L}t + cte$$
$$R_1I - V_0 = cte\, e^{-\frac{R_1}{L}t}$$
$$I = \frac{V_0}{R_1} + cte\, e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

En $t = 0$, $I(0) = 0$:

$$I(0) = \frac{V_0}{R_1} + cte\, e^{-\frac{R_1}{L}(0)} = 0$$
$$\therefore cte = -\frac{V_0}{R_1}$$

$$\therefore I(t) = \frac{V_0}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$$

Cuando $t \to \infty \Rightarrow I = \frac{V_0}{R_1} = 4\,A$

1) Conectamos S:

$$I(0) = 4A$$
$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 15\Omega$$

Usamos:

$$I = \frac{V_0}{R_e} + cte\, e^{-\frac{R_e}{L}t}$$
$$I(0) = \frac{V_0}{R_e} + cte = 4$$
$$cte = 4 - \frac{120}{15} = -4$$

3) $\therefore I(t) = 8 - 4e^{-\frac{15}{L}t}$

2) Cuando $t \to \infty \Rightarrow I = 8\,A$

Tarea #2.

Desde: 31 de Agosto de 2021.
Hasta: 7 de Septiembre de 2021.

P1. Campo magnético y fuerza magnética (15 puntos).

En la figura 1, la corriente en el alambre largo y recto es igual a $I_1 = 5A$ y el alambre yace en el plano de la espira rectangular, la cual lleva una corriente $I_2 = 10A$. Las dimensiones son $c = 0{,}1m$, $a = 0{,}15m$ y $l = 0{,}45m$. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético producido por el alambre.

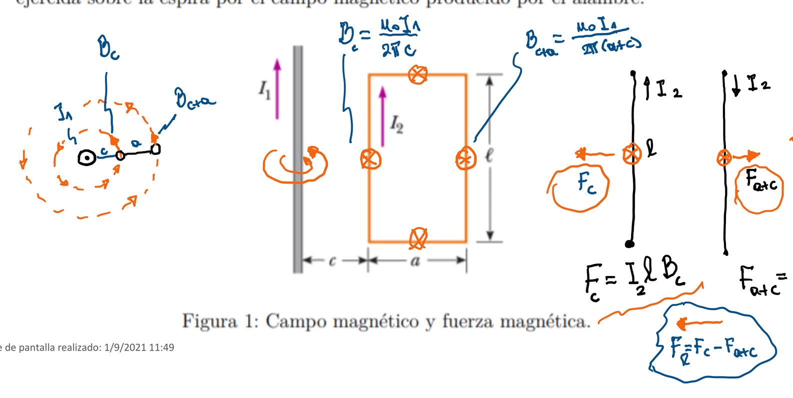


Figura 1: Campo magnético y fuerza magnética.

Recorte de pantalla realizado: 1/9/2021 11:49

Solución:

La fuerza resultante en la espira es:

$$F_{R_x} = F_{a+c} - F_c = I_2 l B_{a+c} - I_2 l B_c =$$
$$= I_2 l (B_{a+c} - B_c) = I_2 l \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+c)} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi c}\right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{c}\right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+c}\right) =$$
$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\left(\frac{a}{c(a+c)}\right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a l}{2\pi c(a+c)}$$

P2. Ley de Ampère (15 puntos).

Considere un cable coaxial infinito como el de la figura 2. El conductor cilíndrico interno de radio a es concéntrico con el cilíndro conductor de radio interno b y radio externo c, donde $a < b < c$. Una corriente I uniforme fluye por el conductor interno en un sentido tal que entra en el dibujo, mientras que otra corriente I idéntica (también uniforme) fluye por el conductor exterior, pero saliendo del dibujo. Se quiere encontrar el campo magnético generado por esta configuración a una distancia r medida desde el origen en los siguientes casos:

a) $r < a$
b) $a < r < b$
c) $b < r < c$
d) $c < r$

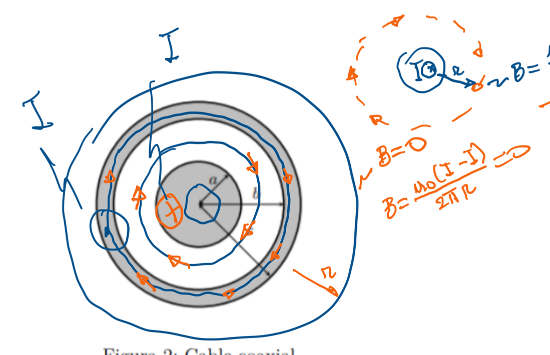


Figura 2: Cable coaxial.

Recorte de pantalla realizado: 1/9/2021 11:49

Solución:

a) $r < a$:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0\left(\frac{r^2}{a^2}I\right)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi}$$

Donde: $\frac{I_1}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi a^2} \Rightarrow I_1 = \frac{r^2}{a^2}I$

b) $a < r < b$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

c) $b < r < c$:

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)I$$

Donde:

$$\frac{I_2'}{\pi(r^2 - b^2)} = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \Rightarrow I_2' = \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}I$$
$$\Rightarrow I_2 = I - I_2' = I\left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$
$$= I\left(\frac{c^2 - b^2 - r^2 + b^2}{c^2 - b^2}\right) = \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)I$$

d) $c < r$:

$$B = 0$$
$$B = \frac{\mu_0(I - I)}{2\pi} = 0$$

P3. Inducción magnética (15 puntos).

Una varilla conductora de longitud l se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en paralelo con un alambre largo (lo consideramos infinito) que lleva una corriente estable I. El eje de la varilla se mantiene perpendicular al alambre, con el extremo cercano a una distancia r del alambre, como se muestra en la figura 3. Demuestre que la magnitud de la fem inducida en la varilla es igual a :

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} ln\left(1 + \frac{l}{r}\right)$$

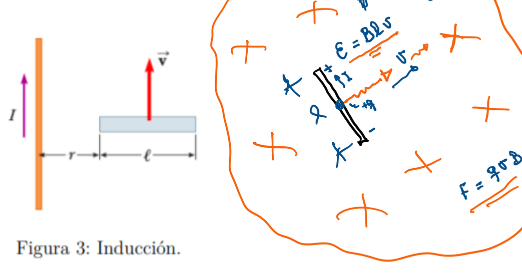


Figura 3: Inducción.

Recorte de pantalla realizado: 1/9/2021 11:50

Solución:

$\otimes B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

$d\mathcal{E} = B(x) v\, dx$

El diferencial de la fem es:

$$d\mathcal{E} = Bv\,dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}v\,dx$$
$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\cdot\frac{dx}{x}$$

Integramos:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\int_r^{r+L}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln|x|\Big|_r^{r+L} =$$
$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\left[\ln|r+L| - \ln|r|\right] = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(\frac{r+L}{r}\right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(1 + \frac{L}{r}\right)$$

Ejemplo: $R = 0$

$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$

$F = qvB$ $F = ILB$

La fem es $\mathcal{E} = BLv$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

P4. Circuito RL (15 puntos).

Considere el circuito de la figura 4, donde el interruptor S ha estado abierto durante un largo período de tiempo, $V = 28$ V, $R = 14\ \Omega$, y las cinco inductancias tienen el valor $L = 30$ mH. Al cerrar el interruptor comienza a fluir una corriente $I(t)$ que depende explícitamente del tiempo.

a) Encuentre la inductancia equivalente L_{eq} que resulta de asociar a todas las inductancias en una sola.

b) Escriba una expresión para la corriente $I(t)$ que fluye a través del circuito y comente, ¿cómo se comporta la corrriente para un tiempo muy largo?

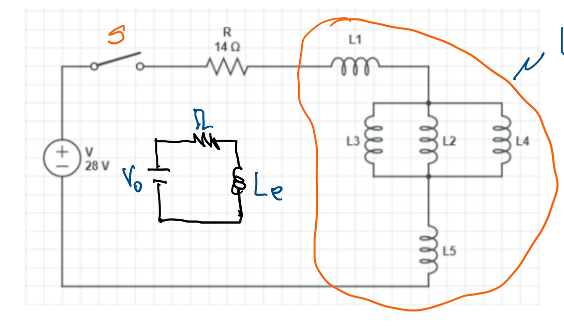


Figura 4: Circuito RL con muchas capacitancias.

Recorte de pantalla realizado: 1/9/2021 11:50

Solución:

a) La inductancia equivalente es:

$$L_e = L_1 + \frac{1}{\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4}} + L_5 = 30 + 10 + 30 = 70\text{ mH}$$

b) $R = 14\Omega$, $V_0 = 28V$, $70\text{ mH} = L$

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad I(0) = 0$$
$$= \frac{28}{14}\left(1 - e^{-\frac{14t}{70\times10^{-3}}}\right)$$

Cuando $t \to \infty \Rightarrow I(t) = \frac{28}{14}\left(1 - e^{-\frac{14t}{70\times10^{-3}}}\right) \to 2\,A$

$$\therefore I = 2A$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0$$
$$\int\frac{dI}{RI - V_0} = -\int\frac{dt}{L} + cte$$
$$\frac{1}{R}\ln|RI - V_0| = -\frac{t}{L} + cte$$
$$\ln|RI - V_0| = -\frac{R}{L}t + cte$$
$$RI - V_0 = e^{-\frac{R}{L}t} + cte$$
$$RI - V_0 = cte\cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$
$$I(t) = \frac{V_0}{R} + cte\, e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Si $I(0) = 0$: $I(0) = \frac{V_0}{R} + cte = 0 \Rightarrow cte = -\frac{V_0}{R}$

$$\therefore I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$