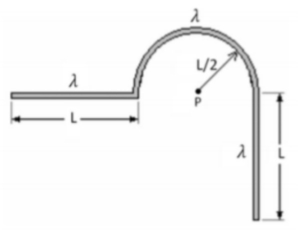
Potencial Eléctrico: Voltaje

jueves, 15 de julio de 2021 14:16

P1. Potencial eléctrico

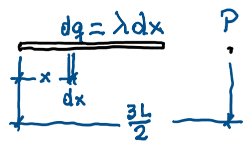
Pueden encontrar videos útiles sobre este tema en este link:
`https://www.youtube.com/playlist?list=PLnA7OD6pPVGzjEmzfUhb3frhDi5Cukm5T`

a) En la distribución lineal continua y uniforme de cargas de la figura 1a, determina el potencial eléctrico en el punto P. Considere $V(\infty) = 0$.
Nota: La siguiente Integral le puede ser útil: $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C$
Resp: $V_P = k\lambda(ln(3) - d \cdot ln(1 + \frac{L}{a}))$



(a)

Solución:



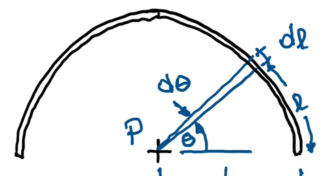
El potencial en P es:

$$dV = \frac{k\,dq}{\frac{3L}{2}-x} = \frac{2k\,dq}{3L-2x} = \frac{2k\lambda dx}{3L-2x}$$

$$V = \int_0^L \frac{2k\lambda dx}{3L-2x} = -2k\lambda \frac{\ln|3L-2x|}{2}\Big|_0^L =$$

$$= -k\lambda(\ln L - \ln 3L)$$

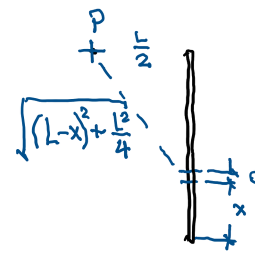
$$= k\lambda \ln 3$$



El potencial eléctrico en P es:

$$dV = \frac{k\,dq}{\frac{L}{2}} = \frac{2k\lambda dl}{L} \Rightarrow V = \frac{2k\lambda}{L}\int_0^{\frac{\pi L}{2}} dl =$$

$$= \frac{2k\lambda}{L}\left(\frac{\pi L}{2}\right) = k\lambda\pi$$



El potencial en P es:

$$dV = \frac{k\,dq}{\sqrt{(L-x)^2+\frac{L^2}{4}}} = \frac{k\lambda dx}{\sqrt{(L-x)^2+\frac{L^2}{4}}}$$

$$V = k\lambda\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{(L-x)^2+\frac{L^2}{4}}} = k\lambda\int_L^0 \frac{-du}{\sqrt{u^2+\frac{L^2}{4}}} =$$

Sea $u = L-x \Rightarrow du = -dx$
Si $x=0 \Rightarrow u = L$
Si $x = L \Rightarrow u = 0$

$$= -k\lambda \ln\left(u + \sqrt{u^2+\frac{L^2}{4}}\right)\Big|_L^0 =$$

$$= -k\lambda\left[\ln\left(\frac{L}{2}\right) - \ln\left(L + \sqrt{\frac{5L^2}{4}}\right)\right] =$$

$$= -k\lambda\left[\ln\left(\frac{L}{2}\right) - \ln\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)L\right] =$$

$$= k\lambda \ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = k\lambda \ln(2+\sqrt{5})$$

El potencial eléctrico en P es:

$$V = k\lambda \ln 3 + k\lambda\pi + k\lambda\ln(2+\sqrt{5})$$

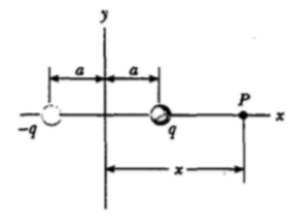
$$= k\lambda\left(\ln 3 + \pi + \ln(2+\sqrt{5})\right) =$$

$$= k\lambda\left(\pi + \ln 3(2+\sqrt{5})\right)$$

b) Un dipolo eléctrico se compone de dos cargas de igual magnitud y signo opuesto, separadas por una distancia $2a$, como se ve en la figura 1b. El dipolo está a lo largo del eje x y centrado en el origen.

1) Calcule el potencial eléctrico en el punto P.
2) Calcule V y E_x en un punto alejado del dipolo.
3) Calcule V y E_x si el punto P está ubicado en cualquier parte entre las dos cargas.

Nota: Una relación alternativa entre E y V que le será útil es $E_x = -\frac{dV}{dx}$ *y así con las demás componentes.*
Resp: $V = \frac{2kqa}{x^2-a^2}$
Resp: $V = \frac{2kqa}{x^2}$, $E = \frac{4kqa}{x^3}$, $x \gg a$
Resp: $V = -\frac{2kqx}{x^2-a^2}$, $E = -2kq\frac{x^2+a^2}{(x^2-a^2)^2}$



(b)

Solución:

1)
$$V = \frac{k(-q)}{x+a} + \frac{kq}{x-a} = kq\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) =$$

$$= kq\left(\frac{x+a-(x-a)}{x^2-a^2}\right) = \frac{2kqa}{x^2-a^2}$$

2) Si $x \gg a$, se tiene:

$$V = \frac{2kqa}{x^2-a^2} \longrightarrow V = \frac{2kqa}{x^2} \quad (a \approx 0)$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\left(\frac{-2x \cdot 2ka}{(x^2)^2}\right) = \frac{4ka}{x^3}$$

3) Si $-a < x < a$, se tiene:

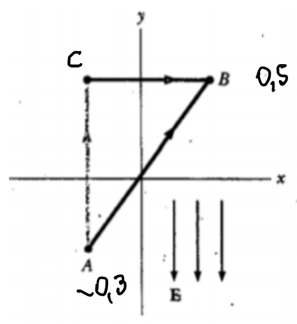
$$V = \frac{k(-q)}{x+a} + \frac{kq}{a-x} = \frac{-kq(a-x)+kq(x+a)}{a^2-x^2} =$$

$$= \frac{2kqx}{a^2-x^2} = -\frac{2kqx}{x^2-a^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -2kq\left[\frac{(1)(x^2-a^2)-x(2x)}{(x^2-a^2)^2}\right] =$$

$$= -2kq\frac{-a^2-x^2}{(x^2-a^2)^2} = \frac{2kq(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2}$$

c) Un campo eléctrico uniforme de 325 V/m de magnitud está dirigido en la dirección $-\hat{y}$, como se muestra en la figura 1c. Las coordenadas del punto A son (-0.2 m, -0.3 m), y las del punto B son (0.4 m, 0.5 m). Calcule la diferencia de potencial $V_B - V_A$ usando la trayectoria: Punto inicial - Punto B - Punto A. Donde el punto inicial tiene la componente vertical de B y la horizontal de A.



(c)

Solución:

La diferencia de potencial $V_B - V_A$ es igual a:

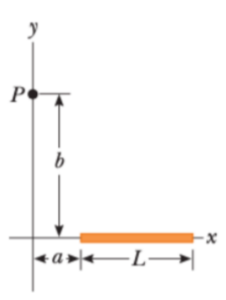
$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l} =$$

$$= -\int_A^C E\,dl\,\cos 180° - \int_C^B E\,dl\,\cos 90° = \int_A^C E\,dl =$$

$$= E\int_A^C dl = E\,l\Big|_A^C = E\,(0{,}5-(-0{,}3)) = 0{,}8E = 260\text{ V}$$

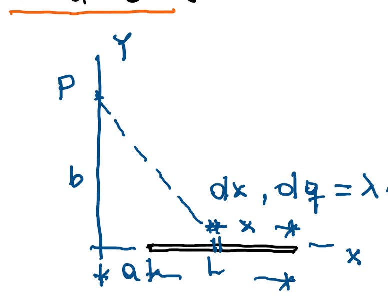
d) La varilla delgada con carga uniforme que se muestra en la figura 1d tiene una densidad de carga lineal λ. Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en el punto P, calculando la integral, sin usar los resultados conocidos vistos en clases o en apuntes.

Resp: $V = k\lambda ln(\frac{a+L+\sqrt{(a+L)^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}})$.



(d)

Solución:



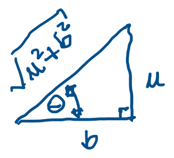
El potencial eléctrico en P se obtiene de:

$$dV = \frac{k\,dq}{\sqrt{(L+a-x)^2+b^2}} = \frac{k\lambda dx}{\sqrt{(L+a-x)^2+b^2}}$$

$$V = k\lambda\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{(L+a-x)^2+b^2}} = -k\lambda\int_{L+a}^a \frac{du}{\sqrt{u^2+b^2}}$$

Sea $u = L+a-x \Rightarrow du = -dx$
Si $x=0 \Rightarrow u = L+a$
Si $x = L \Rightarrow u = a$

Sea $u = b\tan\theta \Rightarrow du = b\sec^2\theta\, d\theta$



$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+b^2}} = \int \frac{b\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{b^2\tan^2\theta+b^2}} = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} =$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln(|\sec\theta+\tan\theta|) + C = \ln\left(\left|\frac{\sqrt{u^2+b^2}}{b} + \frac{u}{b}\right|\right) + C$$

$$\therefore \quad V = -k\lambda \cdot \ln\left(\frac{1}{b}\left|\sqrt{u^2+b^2}+u\right|\right)\Big|_{L+a}^{a} = -k\lambda$$

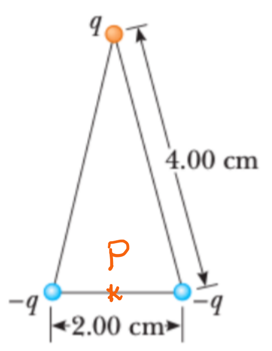
$$= -k\lambda\left[\ln\left(\frac{1}{b}\left|\sqrt{a^2+b^2}+a\right|\right) - \ln\left(\frac{1}{b}\left|\sqrt{(L+a)^2+b^2}+L+a\right|\right)\right]$$

$$= k\lambda \ln\left|\frac{\sqrt{(L+a)^2+b^2}+L+a}{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right|$$

Recorte de pantalla realizado: 22/7/2021 22:10

e) Las tres partículas con carga de la figura 1e están en los vértices de un triángulo isósceles. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la base, si $q = 7{,}00\mu C$.

Resp: $V = -1{,}10 \times 10^7 C = -11{,}0MV$



(e)

Solución:

El potencial eléctrico en P es:

$$V = \frac{k(-q)}{0{,}01} + \frac{k(-q)}{0{,}01} + \frac{kq}{\sqrt{0{,}01^2+0{,}04^2}}$$

$$= kq\left(-\frac{2}{0{,}01} + \frac{1}{\sqrt{0{,}01^2+0{,}04^2}}\right) =$$

$$= -1{,}1\times 10^7\text{ V} = -11\text{ MV}$$

P2. Preguntas Conceptuales

a) Proporcione una explicación física del hecho de que la energía potencial de un par de cargas iguales es positiva mientras que la potencial de un par de cargas diferentes es negativa. Discuta el significado del signo y su efecto.

b) El campo eléctrico dentro de una esfera hueca con carga uniforme es cero. ¿Esto significa que el potencial es cero en el interior de la esfera?. Explique usando un argumento matemático y otro físico.

c) Describa las superficies equipotenciales de (a) una línea de carga infinita y (b) una esfera uniformemente carga.

d) Explique la diferencia entre potencial eléctrico y energía potencial eléctrica.

La **energía potencial asociada con un par de cargas puntuales** separadas una distancia r_{12} es

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (25.13)$$

La energía potencial de una distribución de cargas puntuales se obtiene al sumarlas como en la ecuación 25.13 sobre todos los pares de partículas,

Recorte de pantalla realizado: 22/7/2021 22:11

Si el sistema consiste en más de dos partículas con carga, se obtiene la energía potencial total si calcula U para cada par de cargas y suma los términos algebraicamente. Como un ejemplo, la energía potencial total del sistema de tres cargas que se muestra en la figura 25.10 es

$$U = k_e\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \qquad (25.14)$$

Recorte de pantalla realizado: 22/7/2021 22:29

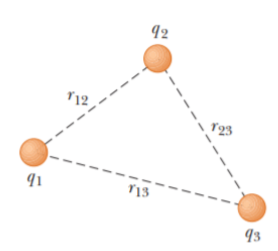


Figura 25.10 Tres cargas puntuales están fijas en las posiciones que se muestran. La energía potencial de este sistema de cargas se conoce por la ecuación 25.14.

Recorte de pantalla realizado: 22/7/2021 22:29

Si define $V = 0$ en $r = \infty$, el potencial eléctrico debido a una carga puntual a cualquier distancia r desde la carga es

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad (25.11)$$

El potencial eléctrico asociado con un grupo de cargas puntuales se obtiene al sumar los potenciales debidos a las cargas individuales.

La **energía potencial asociada con un par de cargas puntuales** separadas una distancia r_{12} es

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (25.13)$$

La energía potencial de una distribución de cargas puntuales se obtiene al sumarlas como en la ecuación 25.13 sobre todos los pares de partículas.