UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE CHILE
INSTITUTO PROFESIONAL
CENTRO DE FORMACIÓN TÉCNICA

inacap

Examen: Cálculo Aplicado

(Pauta de corrección)

ÁREA ACADÉMICA	Minería	**CARRERA**	Ingeniería en Minas
ASIGNATURA	Cálculo Aplicado	**CÓDIGO**	MTCM01-662
SEDE	Renca	**DOCENTE**	Carlos Ruz Leiva
Unidad de Aprendizaje	N°1,2,3	**Criterios a Evaluar**	De 1.1.1 al 3.1.2
DURACIÓN	90 minutos	**FECHA**	20-12-2019

INSTRUCCIONES GENERALES:

1. La nota 4.0 se obtiene logrando un 60% del puntaje total.
2. Utilice lápiz pasta en sus respuestas.
3. Preocúpese de la redacción, ortografía y legibilidad de sus respuestas.
4. Está prohibido el préstamo (o solicitud) de materiales durante la evaluación.
5. Se prohíbe el uso de celulares, mp3, mp4, iphone, ipod o similares durante la evaluación. (Según corresponda indicar: Se prohíbe el uso de calculadoras).

Aprendizaje esperado

1.2.- Aplica derivadas parciales de una función en la resolución de problemas mediante propiedades y reglas de derivación.

2.1.- Reconoce y aplica las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden a la Resolución de Problemas, como resultado de la modelación matemática de fenómenos físicos.

2.2.- Identifica y aplica las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden a la Resolución de Problemas contextualizados en su especialidad.

3.1.- Reconoce y aplica la Transformada de Laplace como herramienta matemática en la resolución de problemas complejos no polinomiales

Criterios de evaluación

1.2.1.- Determina derivadas parciales de primer orden mediante reglas y propiedades de derivación.
1.2.2.- Aplica la regla de la cadena en derivadas parciales de dos variables independientes y funciones implícitas, mediante reglas y propiedades de derivación.

AUTOR(ES)			
Docente(s) elaborador(es)	Nombre Apellido (materno-paterno) – Nombre Sede	Validador Sede	Nombre Apellido (materno-paterno) – Nombre Sede
Asesor diseño curricular	Nombre Apellido (materno-paterno)	Fecha elaboración	Nombre mes 2017

1.2.3.- Aplicas las derivadas multivariadas y los multiplicadores de Lagrange, a la resolución de problemas.

2.1.1.- Reconoce las Ecuaciones Diferenciales de primer orden como herramienta en la modelación matemática.
2.1.2.- Resuelve ecuaciones diferenciales de primer orden mediante isóclinas.
2.1.3.- Plantea ecuaciones diferenciales de acuerdo al enunciado dado.

3.1.1 - Identifica adecuadamente la Transformada de Laplace.
3.1.2 - Aplica la Transformada de Laplace para resolver problemas que involucran Ecuaciones Diferenciales.

Ítem I. Respuesta Desarrollo.

Lea atentamente la pregunta y responda con letra clara y legible en el espacio asignado; cuide los aspectos de redacción y ortografía. Cualquier borrón o respuesta no contestada, será tomada como inválida.

Puntaje total: 6 puntos.

1. (a) Determine, si existen, valores mínimos para función siguiente:

$$f(x,y) = y^2 + 3x^2 - 12x - 2y + 1$$

(b) Evaluar la integral iterada:

$$\int_1^2 \int_0^y (2 + x^2 + y^2)dxdy$$

Pregunta 1 (2 puntos).

Respuesta.

(a) Puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 12 = 0 \qquad \text{(0,2 Puntos)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 = 0 \qquad \text{(0,2 Puntos)}$$

Entonces:

$$x = 2, y = 1 \qquad \text{(0,2 Puntos)}$$

El punto crítico es $P(2,1)$:

Segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (6)(2) - (0)^2 = 12 > 0$$

Como $\Delta > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0$, la función dada tiene un mínimo relativo cuyo valor es:

$$f_{min}(2,1) = (1)^2 + 3(2)^2 - 12(2) - 2(1) + 1 = -12 \qquad \text{(0,4 Puntos)}$$

(b)

$$\int_1^2 \int_0^y (2 + x^2 + y^2) dxdy = \int_1^2 \left(2x + \frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Bigg|_0^y dy =$$

$$= \int_1^2 \left(2x + \frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Bigg|_0^y dy =$$

$$= \int_1^2 \left(2(y) + \frac{(y)^3}{3} + (y)y^2 \right) dy = \qquad (0{,}5 \text{ Puntos})$$

$$= \int_1^2 \left(2y + \frac{y^3}{3} + y^3 \right) dy = \int_1^2 \left(2y + \frac{4y^3}{3} \right) dy =$$

$$= \left(y^2 + \frac{y^4}{3} \right) \Bigg|_1^2 = \left(4 + \frac{16}{3} \right) - \left(1 + \frac{1}{3} \right) = 8 \qquad (0{,}5 \text{ Puntos})$$

2. (a) Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0, \ \ y(2) = 1$$

(b) Halle la solución general de la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$y'' + 2y' = e^{-2x}$$

Pregunta 2 (2 puntos).

Respuesta.

(a) Separamos variables:

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 y$$

$$\frac{dy}{y} = -x^2 dx$$

Integramos:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x^2 dx + C$$

$$\ln|y| = -\frac{x^3}{3} + C \qquad (0{,}5 \text{ Puntos})$$

En $x = 2, y = 1$:

$$\ln|1| = -\frac{(1)^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3}$$

Luego:

$$\ln|y| = -\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \qquad \text{(0,5 Puntos)}$$

(a) Homogénea:

$$y'' + 2y' = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

Entonces:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} \qquad \text{(0,5 Puntos)}$$

Particular:

$$y_P = Axe^{-2x}$$

$$y'_P = -2Axe^{-2x} + Ae^{-2x}$$

$$y''_P = 4Axe^{-2x} - 2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x}$$

$$y''_P = 4Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x}$$

Reemplazamos en

$$y'' + 2y' = e^{-2x}$$
$$4Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x} + 2(-2Axe^{-2x} + Ae^{-2x}) = e^{-2x}$$
$$-2Ae^{-2x} = e^{-2x}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

La solución particular es:

$$y_P = -\frac{1}{2}xe^{-2x}$$

La solución general es:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} \qquad (0{,}5 \text{ Puntos})$$

3. (a) Determine la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = 6 + 3t^2 + 2e^{-3t}\operatorname{sen}(3t)$$

(b) Resolver, usando la transformada de Laplace, la ecuación diferencial

$$y'' + y = 2\cos t \,, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Pregunta 3 (2 puntos).
Respuesta.

(a)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{6 + 3t^2 + 2e^{-3t}\operatorname{sen}(3t)\} =$$

$$= 6\mathcal{L}\{1\} + 3\mathcal{L}\{t^2\} + 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\operatorname{sen}(3t)\} =$$

$$= \frac{6}{s} + \frac{6}{s^3} + \frac{6}{(s+3)^2 + 9} \qquad (1 \text{ Punto})$$

(b) Aplicamos la transformada de Laplace:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{\cos t\}$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2+1) = \frac{2s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \qquad (0{,}5 \text{ Puntos})$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\operatorname{sen}t\}$$

Luego:

$$y(t) = t\operatorname{sen}t, t \geq 0 \qquad (0{,}5 \text{ Puntos})$$