Pauta Evaluación Sumativa 3 Cálculo Aplicado (25%)

ÁREA ACADÉMICA	Minería	**CARRERA**	Ingeniería en Minas
ASIGNATURA	Cálculo Aplicado	**CÓDIGO**	MTCM01-662
SEDE	Renca	**DOCENTE**	Carlos Ruz Leiva
Unidad de Aprendizaje	N°3	**Criterios a Evaluar**	De 3.1.1 al 3.2.5
DURACIÓN	90 minutos	**FECHA**	13-12-2019

NOMBRE ESTUDIANTE:

Apellido Paterno | Apellido Materno | Nombres

RUT: _ _ _ _ _ _ _ _ - _

PUNTAJE MÁXIMO		**NOTA:**	
PUNTAJE OBTENIDO			Firma conforme
Solicita re-corrección	**Sí**	**No**	**Motivo:**

INSTRUCCIONES GENERALES:

1. La nota 4.0 se obtiene logrando un 60% del puntaje total.
2. Utilice lápiz pasta en sus respuestas.
3. Preocúpese de la redacción, ortografía y legibilidad de sus respuestas.
4. Está prohibido el préstamo (o solicitud) de materiales durante la evaluación.
5. Se prohíbe el uso de celulares, mp3, mp4, iphone, ipod o similares durante la evaluación. (Según corresponda indicar: Se prohíbe el uso de calculadoras).

Ítem I. Respuesta Extensa.

Lea atentamente la pregunta y responda con letra clara y legible en el espacio asignado; cuide los aspectos de redacción y ortografía. Cualquier borrón o respuesta no contestada, será tomada como inválida.

Puntaje total: 6 puntos.

1. (a) Determine la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = 7 + 2\mathrm{e}^{-3t} + 4t\mathrm{sen}(3\mathrm{t})$$

(b) Halle la función $h(t)$ si:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$$

Pregunta 1 (2 puntos).

Respuesta.

(a)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{7 + 2\mathrm{e}^{-3t} + 4t\mathrm{sen}(3\mathrm{t})\} =$$

$$= 7\mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-3t}\} + 4\mathcal{L}\{t\mathrm{sen}(3\mathrm{t})\} =$$

$$= \frac{7}{s} + \frac{2}{s+3} - 4\frac{d}{ds}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] =$$

$$= \frac{7}{s} + \frac{2}{s+3} - 4\left[\frac{3(-2s)}{(s^2+9)^2}\right] =$$

$$= \frac{7}{s} + \frac{2}{s+3} + \frac{24s}{(s^2+9)^2}$$

(b)

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{s}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$s = A(s+3) + B(s+2)$$

Si $s = -2 \Rightarrow -2 = A$

Si $s = -3 \Rightarrow -3 = B(-1) \Rightarrow B = 3$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{s}{(s+2)(s+3)} = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{-2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-3t}\}$$

Luego:

$$h(t) = -2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-3t}, t \geq 0$$

2. (a) Resolver, usando la transformada de Laplace, la ecuación diferencial

$$y' + 4y = 2\mathrm{e}^{-t}, y(0) = 1$$

(b) Resolver, usando la transformada de Laplace, la ecuación diferencial

$$y'' + y = 2\,\mathrm{sen}\,t\,, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Pregunta 2 (2 puntos).

Respuesta.

(a) Aplicamos la transformada de Laplace:

$$s\mathcal{L}\{y\} - y(0) + 4\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s+1}$$

$$s\mathcal{L}\{y\} - 1 + 4\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s+1}$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s+4) = \frac{2}{s+1} + 1$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s+4) = \frac{s+3}{s+1}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s+3}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4}$$

$$s + 3 = A(s+4) + B(s+1)$$

$$\text{Si } s = -1\text{:} \quad 2 = 3A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{3}$$

$$\text{Si } s = -4\text{:} \quad -1 = -3B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s+4} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right\}$$

Entonces:

$$y(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}, t \geq 0$$

(b) Aplicamos la transformada de Laplace:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,t\}$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - 1 + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2+1) = \frac{2}{s^2+1} + 1$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2+1) = \frac{s^2+3}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2+1+2}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2+1}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\left\{\text{sen}t + 2\frac{\text{sen}\, t - t\cos t}{2}\right\}$$

Luego:

$$y(t) = 2\text{sen}t - t\cos t\,, t \geq 0$$

Donde:

$$\mathcal{L}\{y\} = 2\frac{1}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\{\mathcal{L}\{\cos t\}\} =$$

$$= 2\frac{1}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} =$$

$$= \frac{2}{s^2+1} + \frac{(s^2+1) - 2s^2}{(s^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2(s^2+1) + 1 - s^2}{(s^2+1)^2} =$$

$$= \frac{s^2+3}{(s^2+1)^2}$$

3. (a) Determine la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = 1 + 5t^2 + 3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{sen}(4\mathrm{t})$$

(b) Resolver, usando la transformada de Laplace, la ecuación diferencial

$$y' + y = 2t, y(0) = 0$$

Pregunta 3 (2 puntos).

Respuesta.

(b)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1 + 5t^2 + 3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{sen}(4\mathrm{t})\} =$$

$$= \mathcal{L}\{1\} + 5\mathcal{L}\{t^2\} + 3\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{sen}(4\mathrm{t})\} =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{10}{s^3} + 3\left[\frac{4}{(s+2)^2 + 16}\right] =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{10}{s^3} + \frac{12}{(s+2)^2 + 16}$$

(b)

$$\mathcal{L}\{y' + y\} = \mathcal{L}\{2t\}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = 2\frac{1}{s^2}$$

$$s\mathcal{L}\{y\} - y(0) + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s+1) = \frac{2}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

$$2 = As(s+1) + B(s+1) + Cs^2$$

$$\text{Si } \ s = 0: \ 2 = B$$

$$\text{Si } \ \mathrm{s} = -1: \ 2 = \mathrm{C}$$

$$\text{Si } \ \mathrm{s} = 1: \ 2 = 2\mathrm{A} + 2(2) + 2 \quad \Rightarrow \quad A = -2$$

Luego:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2(s+1)} = \frac{-2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1}$$

Entonces:

$$y(t) = -2 + 2t + 2e^{-t}, t \geq 0$$