UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE CHILE
INSTITUTO PROFESIONAL
CENTRO DE FORMACIÓN TÉCNICA

Pauta Evaluación Sumativa 2: Cálculo Aplicado (25%)

ÁREA ACADÉMICA	Minería	**CARRERA**	Ingeniería en Minas
ASIGNATURA	Cálculo Aplicado	**CÓDIGO**	MTCM01-662
SEDE	Renca	**DOCENTE**	Carlos Ruz Leiva
Unidad de Aprendizaje	N°2	**Criterios a Evaluar**	De 2.1.1 al 2.2.5
DURACIÓN	90 minutos	**FECHA**	25-11-2019

NOMBRE ESTUDIANTE:

Apellido Paterno | Apellido Materno | Nombres

RUT: _ _ _ _ _ _ _ _ - _

PUNTAJE MÁXIMO		**NOTA:**	Firma conforme
PUNTAJE OBTENIDO			
Solicita re-corrección	**Sí** / **No**	**Motivo:**	

INSTRUCCIONES GENERALES:

1. La nota 4.0 se obtiene logrando un 60% del puntaje total.
2. Utilice lápiz pasta en sus respuestas.
3. Preocúpese de la redacción, ortografía y legibilidad de sus respuestas.
4. Está prohibido el préstamo (o solicitud) de materiales durante la evaluación.
5. Se prohíbe el uso de celulares, mp3, mp4, iphone, ipod o similares durante la evaluación. (Según corresponda indicar: Se prohíbe el uso de calculadoras).

Ítem I. Respuesta Extensa.

Lea atentamente la pregunta y responda con letra clara y legible en el espacio asignado; cuide los aspectos de redacción y ortografía. Cualquier borrón o respuesta no contestada, será tomada como inválida.

Puntaje total: 6 puntos.

1. (a) Resolver la ecuación diferencial

$$x^2\frac{dy}{dx} = y, \quad y(1) = -1$$

(b) Resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 2$$

Pregunta 1 (2 puntos).

Respuesta.

(a) Separamos variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$$

Integramos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2} + C$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{x}+C}$$

$$y = Ce^{-\frac{1}{x}}$$

Cálculo de C:

$$y(1) = Ce^{-\frac{1}{(1)}} = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -e$$

Luego:

$$y = -ee^{-\frac{1}{x}} = -e^{1-\frac{1}{x}}$$

(b)

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x}$$

El factor de integración es:

$$F = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln|x|} = x^3$$

Multiplicamos por el factor:

$$x^3\frac{dy}{dx} + x^3\frac{3}{x}y = x^3\frac{2}{x}$$

Simplificamos:

$$\frac{d}{dx}\{x^3y\} = 2x^2$$

Integramos:

$$x^3y = 2\int x^2dx + C$$

$$x^3y = \frac{2x^3}{3} + C$$

Luego:

$$y = \frac{2}{3} + \frac{C}{x^3}$$

2. (a) Halle la solución general de la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$y'' + 2y' = \mathrm{e}^{-2x}$$

(b) Determine la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' + y = \cos x$$

Pregunta 2 (2 puntos).

Respuesta.

(a)

Parte Homogénea: $y'' + 2y' = 0$

Ecuación característica: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -2$$

Luego:

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

Parte Particular:

$$y_P = Axe^{-2x}$$
$$y_P{}' = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}$$
$$y_P{}'' = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} = -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}$$

Reemplazamos en

$$y'' + 2y' = \mathrm{e}^{-2x}$$

$$(-4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}) + 2(Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}) = \mathrm{e}^{-2x}$$

$$-2Ae^{-2x} = e^{-2x}$$

Entonces:

$$A = -\frac{1}{2}$$

La solución particular es:

$$y_P = -\frac{1}{2}xe^{-2x}$$

La solución general es:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x}$$

(b)

Parte Homogénea: $y'' + y = 0$

Ecuación característica: $\lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda = \pm i$$

Luego:

$$y_H = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

Parte Particular:

$$y_P = Ax \operatorname{sen} x$$

$$y_P' = A \operatorname{sen} x + Ax \cos x$$

$$y_P'' = A\cos x + A\cos x - Ax \operatorname{sen} x = 2A\cos \mathrm{x} - Ax \operatorname{sen} \mathrm{x}$$

Reemplazamos en:

$$y'' + y = \cos x$$

$$(2A\cos x - Ax \operatorname{sen} \mathrm{x}) + (Ax \operatorname{sen} x) = \cos x$$

$$2A\cos \mathrm{x} = \cos x$$

Entonces:

$$A = \frac{1}{2}$$

La solución particular es:

$$y_P = \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x$$

La solución general es:

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x$$

3. (a) Hallar la intensidad de corriente I en función del tiempo t (en segundos), sabiendo que I satisface la ecuación diferencial $\frac{dI}{dt}+50I=\mathrm{e}^{-2t}$,con $I(0)=0$.
(b) Resuelva la ecuación lineal de segundo orden:

$$y''+4y'+4y=x+4\,,\text{con } \mathrm{y}(0)=0, y'(0)=1$$

Pregunta 3 (2 puntos).

Respuesta.

(a) La ecuación dada es lineal de primer orden, pero se puede resolver con coeficientes indeterminados.

Homogénea: $\frac{dI}{dt}+50I=0$

Ecuación característica: $\lambda+50=0$

$$\lambda=-50$$

Luego:

$$I_H=Ce^{-50t}$$

Particular:

$$I_P=Ae^{-2t}$$
$$I_P'=-2Ae^{-2t}$$

Reemplazamos en $\frac{dI}{dt}+50I=\mathrm{e}^{-2t}$

$$(-2Ae^{-2t})+50(Ae^{-2t})=\mathrm{e}^{-2t}$$

$$48Ae^{-2t}=e^{-2t}$$
$$A=\frac{1}{48}$$

La solución particular es:

$$I_P=\frac{1}{48}e^{-2t}$$

Entonces, la solución general es:

$$I=Ce^{-50t}+\frac{1}{48}e^{-2t}$$

Cálculo de C:

$$I(0)=Ce^{-50(0)}+\frac{1}{48}e^{-2(0)}=C+\frac{1}{48}=0$$

$$C=-\frac{1}{48}$$

La solución es:

$$I(t)=-\frac{1}{48}e^{-50t}+\frac{1}{48}e^{-2t}$$

(b)

Parte Homogénea: $y'' + 4y' + 4y = 0$

Ecuación característica: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Luego:

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Parte Particular:

$$y_P = Ax + B$$

$$y_P' = A, y_P'' = 0$$

Reemplazamos en: $y'' + 4y' + 4y = x + 4$

$$(0) + 4(A) + 4(Ax + B) = \; x + 4$$

$$4A + 4B = 4 \quad \wedge \quad 4A = 1$$

$$A = \frac{1}{4} \;, B = \frac{3}{4}$$

Luego:

$$y_P = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

La solución general es:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

Cálculo de C_1 y C_2:

$$\mathrm{y}(0) = C_1 e^{2(0)} + C_2(0)e^{2(0)} + \frac{1}{4}(0) + \frac{3}{4} = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = -\frac{3}{4}$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}$$

$$y'(0) = 2C_1 e^{2(0)} + 2C_2(0)e^{2(0)} + C_2 e^{2(0)} + \frac{1}{4} = 1$$

$$2C_1 + C_2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{9}{4}$$

La solución es:

$$y = -\frac{3}{4}e^{2x} + \frac{9}{4}x e^{2x} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$