Clase 3: Raíces reales de polinomios

- Usar el teorema de las raíces racionales para listar las posibles raíces racionales de un polinomio.
- Calcular las raíces de un polinomios usando el teorema de las raíces racionales.
- Deducir a partir de la gráfica de un polinomio cuales de los posibles ceros racionales listados es un cero del polinomio.
- Determinar una factorización con factores lineales a partir de las raíces reales de un polinomio.

1 Ceros reales de números reales

El Teorema del Factor nos asegura que un número c es raíz de un polinomio P de grado n si y sólo si $P(x) = (x-c)Q(x)$ siendo Q un polinomio de grado $n-1$. En este sentido, conocer las raíces de un polinomio nos permite determinar una factorización de éste con factores lineales.

Consideremos el polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x+2)(x-3) \\ &= x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

Es claro que las raíces de P son -2, 1 y 3. Cuando se expande el polinomio, la constante 6 se obtiene al multiplicar $(-2)\cdot(1)\cdot(3)$. Esto quiere decir que las raíces de un polinomio son factores del término constante. El siguiente teorema generaliza esta observación y nos permite tener un criterio para determinar, en caso se existir, raíces racionales de un polinomio.

Teorema de los ceros racionales

Sea P con polinomio con coeficientes enteros dado por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

Si $c = \dfrac{p}{q}$ es una raíz racional de P, entonces $\underline{p \text{ es factor de } a_0}$ y $\underline{q \text{ es factor de } a_n}$

Ejemplo. Determine las raíces racionales del polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

Solución. Sea $c = \dfrac{p}{q}$ una raíz racional de P. Por el teorema anterior

$$\begin{array}{ll} p \text{ es factor de } 2 & \qquad\qquad p = \pm 1, \pm 2 \\ q \text{ es factor de } 1 & \qquad\qquad q = \pm 1 \end{array}$$

Entonces las posibles raíces racionales son $c = \pm 1, \pm 2$. Probamos cada una de estas posibilidades

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^3 - 3\cdot(1) + 2 = 0 \\ P(-1) &= (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 2 = 4 \\ P(2) &= (2)^3 - 3\cdot(2) + 2 = 4 \\ P(-2) &= (-2)^3 - 3\cdot(-2) + 2 = 0 \end{aligned}$$

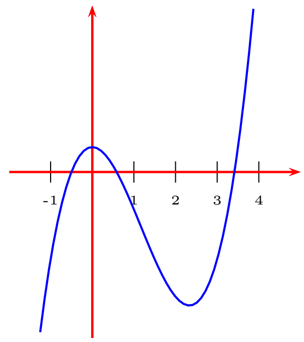
Por lo tanto las raíces racionales de P son 1 y -2. Por el teorema del resto sabemos que $(x-1)$ y $(x-(-2)) = (x+2)$ son factores de $P(x)$, luego $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ es factor de $P(x)$. Finalmente, aplicando el algoritmo de la división tendremos

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-1)$$

□

Ejercicio. Determine las raíces racionales del polinomio $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 4$.

Ejemplo. La gráfica de $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2$ se muestra a continuación

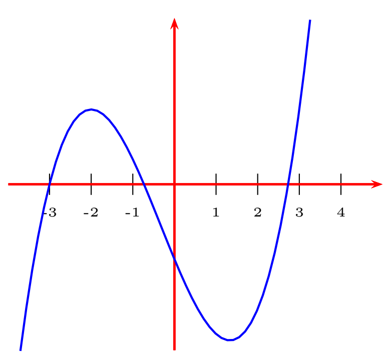


Sabiendo que P tiene una raíz racional, determine las raíces reales de P y una factorización en términos lineales.

Solución. Las raíces racionales de P son
$$c = \pm 1, \pm\frac{1}{2}$$
De la gráfica se deduce que $\pm\frac{1}{2}$ son las únicas posibles raíces racionales. Evaluando el polinomio en estos valores,
$$P(-1/2) = 2(-1/2)^3 - 7(-1/2)^2 + 2 = 0$$
$$P(1/2) = 2(1/2)^3 - 7(1/2)^2 + 2 = \frac{1}{2}$$
Dado que $c = -1/2$ es raíz, por el teorema del factor tendremos que $x - 1/2$ es factor (también lo es $2x - 1$). Usando el algoritmo de la división tendremos
$$P(x) = (2x - 1)(x^2 - 4x + 2)$$
El factor $Q(x) = x^2 - 4x + 2$ tiene raíces $2 \pm \sqrt{2}$ y por tanto las raíces de P son
$$\frac{1}{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$$
y una factorización en términos lineales es
$$P(x) = (2x - 1)(x - (2 - \sqrt{2}))(x - (2 + \sqrt{2}))$$

□

Ejercicio. La gráfica de $P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$ se muestra a continuación



Sabiendo que P tiene una raíz racional, determine las raíces reales de P y una factorización en términos lineales.

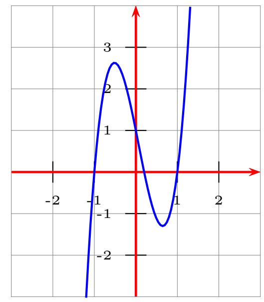
Ejercicios

1. Determine los posibles ceros racionales dados por el **teorema de los ceros racionales** en cada una de las siguientes ecuaciones y determine una factorización en términos lineales.

   (a) $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

   (b) $2x^4 - x^3 + 2x + 3 = 0$

2. Considere el polinomio $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$ y su gráfica.

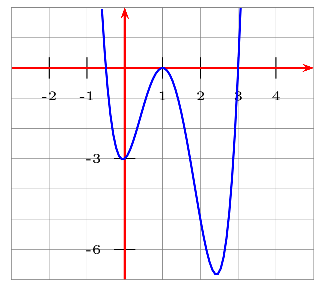


   (a) Listar todos los posibles ceros racionales del polinomio P.

   (b) Sabiendo que todos los ceros de P racionales, a partir de la gráfica listar los ceros de P.

   (c) Determine una factorización de P en términos lineales.

3. Considere el polinomio $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3$ y su gráfica.



   (a) Listar todos los posibles ceros racionales del polinomio P.

   (b) Sabiendo que todos los ceros de P racionales, a partir de la gráfica listar los ceros de P.

   (c) Determine una factorización de P en términos lineales.

4. Determine las raíces de los siguientes polinomios y una factorización en términos lineales.

   (a) $P(x) = 4x^3 - 7x + 3$

   (b) $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$

   (c) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

   (d) $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

   (e) $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 13x - 3$

Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.