Clase 5: Modelando con funciones

- Formular en término de funciones lineales un problema y calcular su solución.
- Resolver problemas de mínimos/máximos formulados en términos de funciones cuadráticas.
- Formular en término de funciones cuadráticas un problema y calcular su solución.

1 Modelando con funciones

En todo modelo matemático se puede determinar 4 fases:

1. **Identifique la variable.**
2. **Transforme palabras en álgebra.**
3. **Función que represente el modelo.**
4. **Calcular la solución del problema.**

1.1 Modelos Lineales

Los modelos lineales son aquellos modelos que están formulados mediante una función lineal (función de primer grado).

Ejemplo. Una compañía de renta de autos cobra \$15.000 como cuota inicial y \$50 por cada kilómetro recorrido.

1. Determine una función costo C por rentar un auto como función de la cantidad de kilómetros recorridos.
2. Si una persona paga \$67.500 por rentar un auto, ¿cuántos kilómetros recorrió?

Solución.

1. **Identifique la variable.**

$$x = \text{número de kilómetros recorridos}$$

2. **Transforme palabras en álgebra.**

Palabras	**Álgebra**
Número de kilómetros recorridos	x
Costo por kilómetros recorrido	$50x$
Cuota inicial	15.000

3. **Función que represente el modelo.**

$$\begin{aligned} \text{Costo total} &= \text{Cuota inicial} + \text{Costo por kilómetros recorridos} \\ C(x) &= 67.500 + 50x \end{aligned}$$

4. **Calcular la solución del problema.**

$$\begin{aligned} C(x) &= 67.500 \\ 50x + 15.000 &= 67.500 \\ 50x &= 42.500 \\ x &= 850 \end{aligned}$$

□

Ejercicio (alumno)**.** Gloria tiene 1 millón de pesos para invertir en acciones de dos empresas diferentes. Luego de un año de inversión la primera empresa paga 6% de lo invertido mientras que la segunda paga 4% de lo invertido.

1. Determine una función I que represente la cantidad de dinero ganado en función de la cantidad de dinero invertido en la primera empresa.
2. Si Gloria recibe en un año \$48.000, ¿cuánto dinero invirtió en cada una de las empresas?

1.2 Modelos Cuadráticos

Los modelos cuadráticos son aquellos modelos que están formulados mediante una función cuadrática (función de segundo grado).

Ejemplo. Un terreno rectangular mide 18 metros más de largo que de ancho.

1. Determine una función A que represente el área del terreno como función del ancho.
2. Si el área del terreno es $11.800\,m^2$, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

1. **Identifique la variable.**

$$x = \text{longitud en metros del ancho del terreno}$$

2. **Transforme palabras en álgebra.**

Palabras	**Álgebra**
Ancho del terreno	x
Largo del terreno	$x+18$

3. **Función que represente el modelo.**

$$\begin{aligned} \text{Área del terreno} &= (\text{Ancho del terreno}) \cdot (\text{Largo del terreno}) \\ A(x) &= x \cdot (x+18) \end{aligned}$$

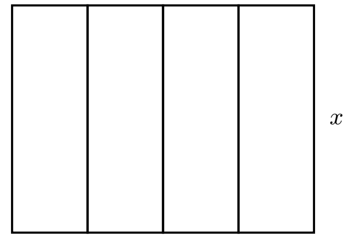
4. **Calcular la solución del problema.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 11.800 \\ x \cdot (x+18) &= 11.800 \\ x^2 + 18x - 11.800 &= 0 \\ (x-100)(x+118) &= 0 \\ x = 100 \quad \text{o} \quad x &= -118 \end{aligned}$$

Como las medidas de longitudes son cantidades positivas, se tiene que el ancho del terreno es de $100\,m$ mientras que su largo es de $118\,m$.

□

Ejercicio. Un granjero con 400 metros de cerca quiere encerrar un terreno rectangular y dividirla después en cuatro corrales iguales, con cercas paralelas a un lado del terreno rectangular (ver la figura).



1. Determine una función A que represente el área del terreno como función del lado x.
2. Si el área del terreno es $1.750\, m^2$, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

1.3 Optimización

Ejemplo. Si se lanza una bola directamente hacia arriba con una velocidad de $20\, m/s$, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $h(t) = 20t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

Solución. La función cuadrática h tiene su máximo en $t = -\dfrac{-16}{2(20)} = \dfrac{2}{5}$, máximo dado por

$$h(2/5) = 20 \cdot \frac{2}{5} - 16 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{136}{25}$$

□

Ejercicio (alumno)**.** Un vendedor de bebidas gaseosas en una popular playa analiza sus registros de ventas, y encuentra que si vende n latas de bebida en un día, su ganancia (en pesos) está dada por

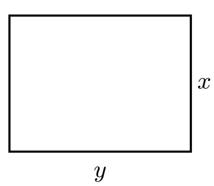
$$P(n) = -0.01n^2 + 3n + 18000$$

¿Cuántas bebidas debe vender para maximizar su ganancia?, ¿cuál es su ganancia máxima en un día?

Ejemplo. Un agricultor tiene 2400 metros de cerca para cercar un terreno rectangular.

1. Determine una función que modele el área del terreno cercado.
2. Determine las dimensiones que debe tener el terreno cercado para que su área sea máxima.

Solución. Considere la siguiente imagen del terreno



Dado que $2x + 2y = 2.400$, una función área es $A(x) = x(1.200 - x)$.

El máximo de la función cuadrática A está en $x = 600$, y por tanto el área máxima es $A(600) = 3.600\, m^2$. □

Ejercicios

1. Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de \$2.000 por los primeros 100 mensajes de texto y \$30 por cada mensaje adicional de texto.

   (a) Determine una función C que representa la cuenta en un mes como función de número de mensajes de textos enviados.

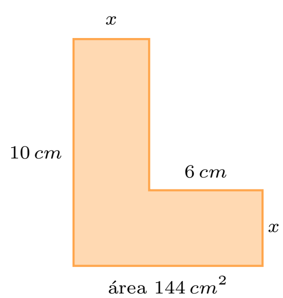
   (b) Si la cuenta por mensaje de texto para un mes es de \$7.930. ¿Cuántos mensajes de texto se enviaron?

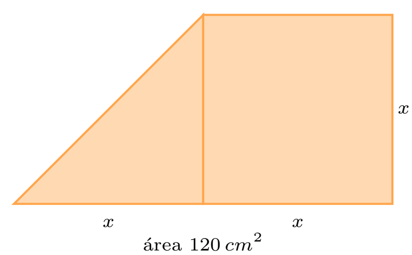
2. Se invierte \$10.000 a cierta tasa de interés anual, y se invierte otros \$20.000 a una tasa anual que es medio por cierto más alta.

   (a) Determine una función I que representa la cantidad de dinero ganado en un año como función de la tasa de interés más baja.

   (b) Si se recibe un total de \$1.150 de interés en 1 año, ¿a qué tasa se invierten los \$10.000?

3. Determine la longitud x en cada una de las siguientes figuras





4. La longitud, en metros, de un terreno rectangular es tres veces su ancho.

   (a) Determine una función A que represente el área del terreno en función de su longitud.

   (b) Determine la longitud del terreno para que el área sea $4.800\,m^2$.

5. Un triángulo rectángulo tiene un cateto dos veces más grande que el otro.

   (a) Determine una función P que represente el perímetro del triángulo en función del cateto más corto.

   (b) Determine la longitud cateto más corto de modo que el perímetro del triángulo sea 1320.

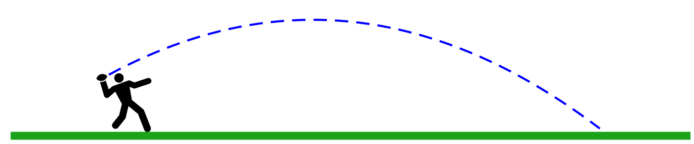
6. Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 2 metros sobre el suelo, a una velocidad de $1.5\,m/s$. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -0.08x^2 + 1.5\,x + 2$$

   donde x es la distancia en metros que el balón ha recorrido horizontalmente.

   (a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.

   (b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.

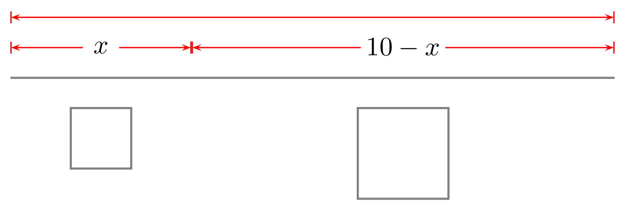


7. El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en una hectárea de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por lo tanto, en número de manzanas producidas por hectárea es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

   ¿Cuántos árboles deben plantarse por herctárea para obtener la máxima producción de manzanas?

8. Un alambre de $10\,cm$ de largo se corta en dos trozos, uno de longitud x y otro de longitud $10 - x$, como se muestra en la figura. Cada trozo se dobla en la forma de un cuadrado.



   (a) Determine una función A que modele el área total encerrada por los dos cuadrados.

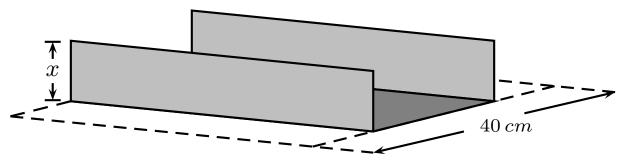
   (b) Determine el valor de x que reduce al mínimo el área total de los dos cuadrados.

9. Un canal para agua lluvia se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 40 centímetros de ancho, como se muestra en la figura.

   (a) Determine una función que modele el área de la sección tranversal del canal en términos de x.

   (b) Determine el valor de x que haga máxima el área de la sección transversal del canal.

   (c) ¿Cuál es el área máxima de la sección tranversal del canal?



Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.