Clase 4: Función cuadrática

- Determinar la forma estándar de una función cuadrática.
- Determinar las coordenadas del vértice, mínimo o máximo de una función cuadrática.
- Trazar la gráfica de una función cuadrática dada su fórmula.

1 Función cuadrática

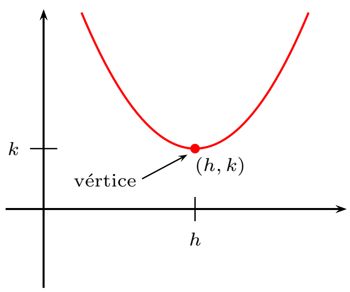
Una **función cuadrática** es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

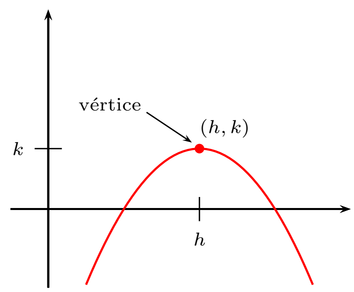
Toda función cuadrática se puede escribir

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

denominada **forma estándar**.



$a > 0$



$a < 0$

El valor mínimo o máximo de f está dado por k.

Ejemplo. Sea $f(x) = 4x^2 - 12x + 13$ función cuadrática.

1. Exprese f en forma estándar.
2. Determine las coordenadas del vértice.
3. Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados.
4. Calcule el valor mínimo o máximo de f.
5. Trace la gráfica de f.

Solución. Comenzaremos escribiendo la función cuadrática f en su forma estándar.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^2 - 8x - 5 \\
&= 4(x^2 - 2x) - 5 && \text{Factorizar} \\
&= 4(x^2 - 2x + {\color{red}1}) - 5 - 4 \cdot {\color{red}1} && \text{completar cuadrado} \\
&= 4(x-1)^2 - 9
\end{aligned}$$

Las coordenadas del vértice son $(1, -9)$.

Los puntos de intersección con los ejes coordenados son:

- Intersección con el eje X. Estos puntos corresponden a los $(x, 0)$ con x que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$, es decir

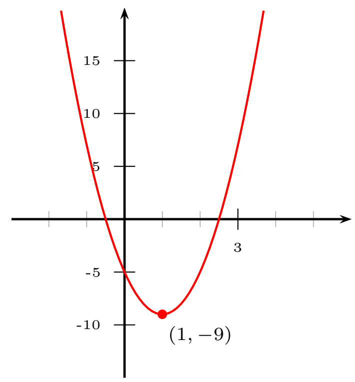
$$4(x-1)^2 - 9 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x-1)^2 = \frac{9}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1 \pm \frac{3}{2}$$

  Por lo tanto, los puntos de intersección con el eje X son $(-1/2, 0)$ y $(5/2, 0)$.

- Intersección con el eje Y. Estos puntos corresponden a los $(0, y)$, es decir $y = f(0)$ y por tanto $y = -5$. Por lo tanto, el punto de intersección con el eje Y es $(0, -5)$.

Sabemos que $f(x) = 4(x-1)^2 - 9$, con $a = 4$, $h = 1$ y $k = 9$. Dado que $a > 0$ entonces f tiene como valor mínimo a $k = -9$.

Con los datos anteriormente calculados, la gráfica de f es:



$\square$

Ejercicio (alumno)**.** Sea $f(x) = -2x^2 + x + 1$ función cuadrática.

1. Exprese f en forma estándar.
2. Determine las coordenadas del vértice.
3. Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados.
4. Calcule el valor mínimo o máximo de f.
5. Trace la gráfica de f.

Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

El valor máximo o mínimo de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** de f es $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
- Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** de f es $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Demostración. Escribimos f en forma estándar,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Luego el vértice tiene coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

y el valor mínimo o máximo de f corresponde a

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c-\frac{b^2}{4a}$$

$\blacksquare$

Ejemplo. Calcular el valor máximo o mínimo de la función cuadrática

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$$

Solución. Evaluando en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2(-2)} = 1$ tendremos que el valor máximo (ya que $a < 0$) es

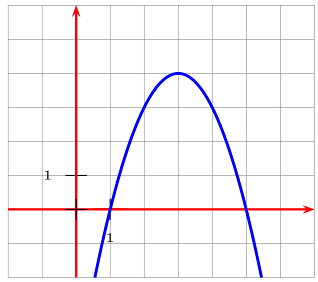
$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$

$\square$

Ejercicio (alumno)**.** Calcular el valor máximo o mínimo de la función cuadrática

$$f(x) = 3x^2 + 9x + 2$$

Ejercicios

1. Se da la gráfica de una función cuadrática
$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$


   (a) Exprese la cuadrática en forma normal.
   (b) Determine las coordenadas del vértice.
   (c) Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados.
   (d) Determine el valor máximo o mínimo de f.
   (e) Determine el recorrido de f.

2. Considere las siguientes funciones cuadráticas

   - $f(x) = 2x^2 - x + 3.$
   - $f(x) = 100 - 49x - 7x^2$
   - $f(x) = 2x(x-4) + 7$

   (a) Exprese la función cuadrática en forma estándar.
   (b) Determine las coordenadas del vértice.
   (c) Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados.
   (d) Determine el valor máximo o mínimo de f.
   (e) Determine el recorrido de f.
   (f) Trace la gáfica de f.

3. Determine una función f cuya gráfica sea una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

4. Determine una función f cuya gráfica sea una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 14)$.

Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.