Clase 3: Transformaciones de funciones

- Describir la gráfica de una función mediante transformaciones de funciones a partir de una función dada.
- Explicar cómo se obtiene la gráfica de una función, mediante transformaciones de funciones, a partir de la gráfica de una función dada.
- Trazar la gráfica de las curvas dadas usando transformaciones de funciones.
- Determinar una expresión algebraica de la función que resulta al aplicarle transformaciones de funciones a una función dada.
- Determinar una expresión algebraica de la función que resulta al aplicarle transformaciones de funciones a la gráfica de una función dada.
- Trazar la gráfica de transformaciones de una función conociendo la gráfica de ésta.

1. Transformaciones de funciones

1.1. Reflexión en torno al eje Y

Sea f una función de variable real y $g(x) = f(-x)$. Para todo a en el dominio de f se tendrá

$$g(-a) = f(-(-a)) = f(a)$$

De la igualdad anterior se deduce que $a \in \mathrm{Dom}(f)$ si y sólo si $-a \in \mathrm{Dom}(g)$. Además, el punto $(-a, g(-a))$ sobre la gáfica de $y = g(x)$ está dado por

$$(-a, g(-a)) = (-a, f(a))$$

de este modo, todo punto sobre la gáfica de $y = g(x)$ es *reflejo respecto al eje Y de un punto en la gráfica de $y = f(x)$*.

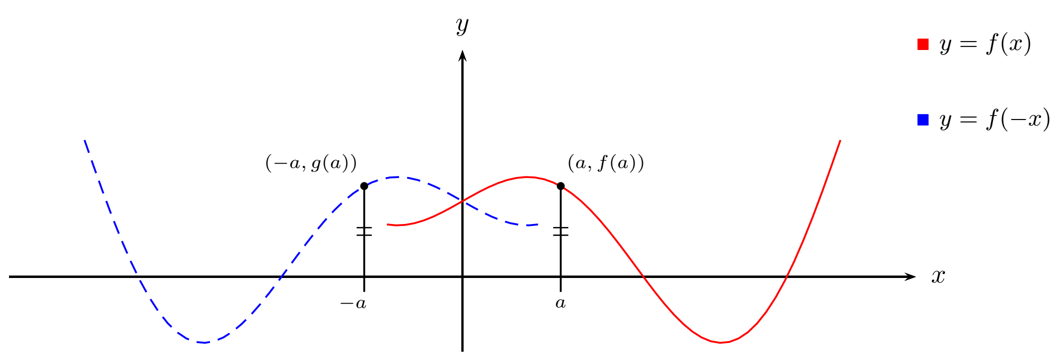
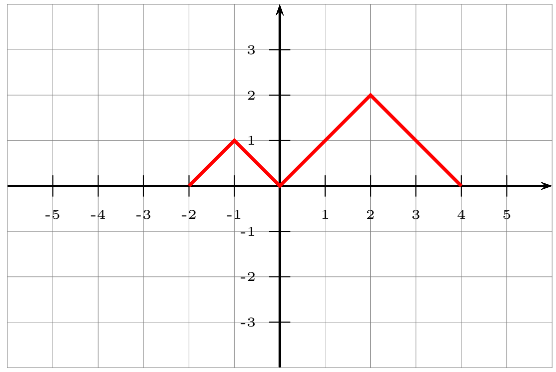


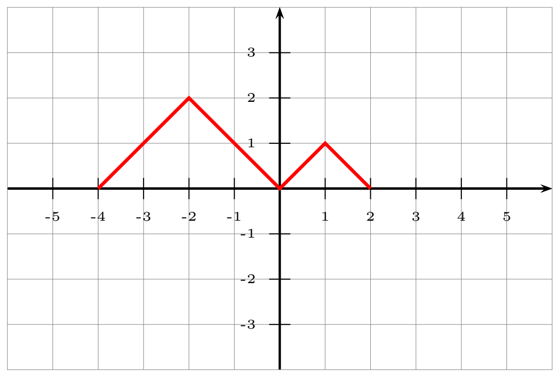
Figura 1. Reflexión en torno al eje Y

Ejemplo. Se da la gráfica de una función f en su dominio



Trace la gráfica de $g(x) = f(-x)$ usando transformaciones de funciones.

Solución.



$\square$

1.2. Reflexión en torno al eje X

Si f es una función de variable real y $g(x) = -f(x)$, entonces el punto

$$(a, g(a)) = (a, -f(a))$$

sobre la gráfica de $y = g(x)$, es un reflejo en torno al eje X del punto $(a, f(a))$ que está en la gráfica de $y = f(x)$. La siguiente figura muestra como obtener la gráfica de $y = g(x)$ conociendo la gráfica de $y = f(x)$.

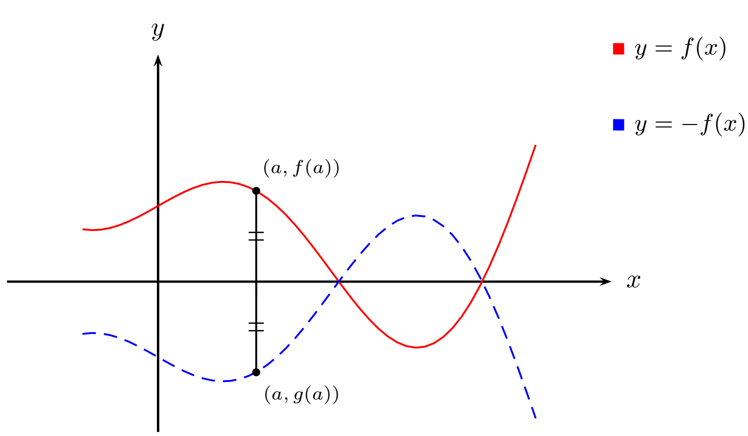
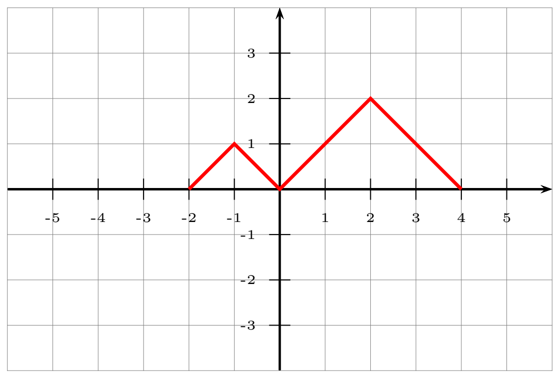


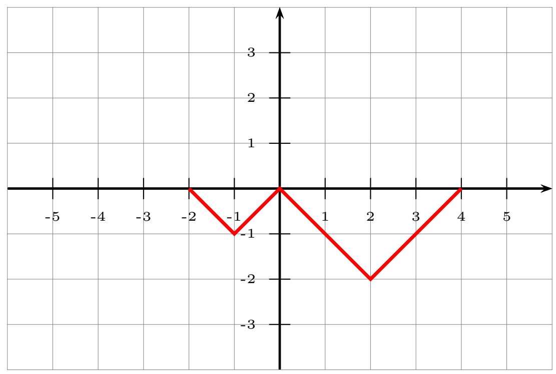
Figura 2. Reflexión en torno al eje X

Ejemplo. Se da la gráfica de una función f en su dominio



Trace la gráfica de $g(x) = -f(x)$ usando transformaciones de funciones.

Solución.



□

1.3. Traslación horizontal

Sea f una función de variable real y $a > 0$.

- Si $g(x) = f(x - a)$ entonces
$$g(x + a) = f(x)$$
y por tanto el punto $(x + a, g(x + a)) = (x + a, f(x))$ en la gráfica de $y = g(x)$ resulta de trasladar a unidades a la derecha el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $y = f(x)$.

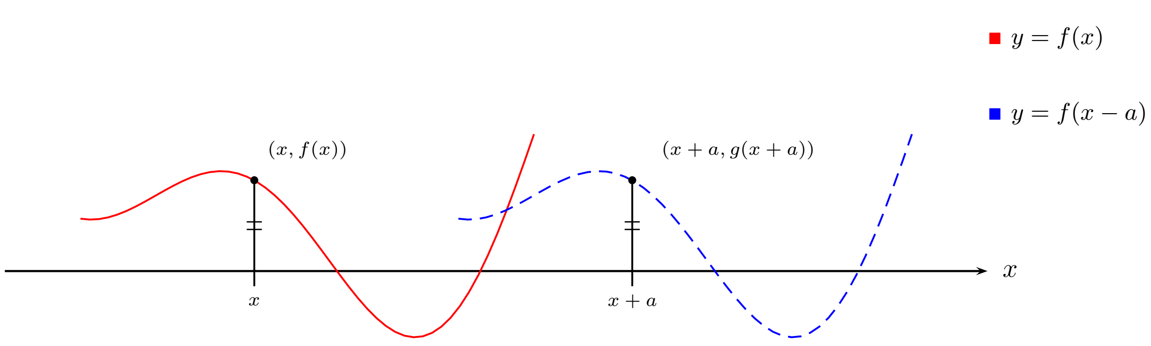


Figura 3. Traslación horizontal hacia la derecha

- Si $g(x) = f(x+a)$ entonces
$$g(x-a) = f(x)$$
y por tanto el punto $(x-a, g(x-a)) = (x-a, f(x))$ en la gráfica de $y = g(x)$ resulta de trasladar a unidades a la izquierda el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $y = f(x)$.

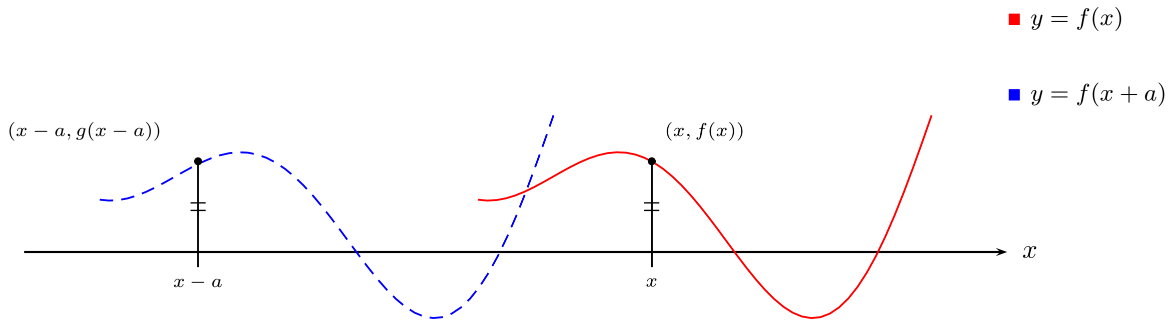
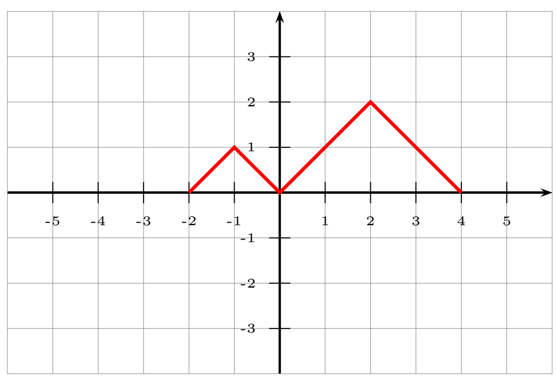


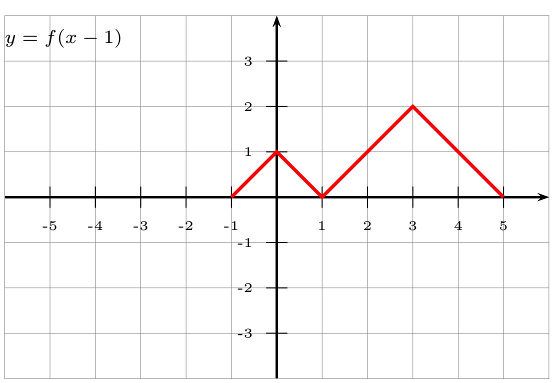
Figura 4. Traslación horizontal hacia la izquierda

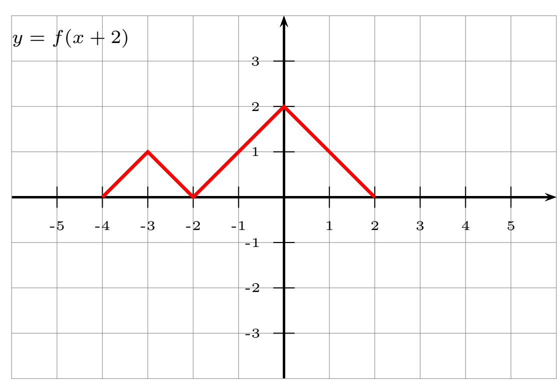
Ejemplo. Se da la gráfica de una función f en su dominio



Trace la gráfica de $g(x) = f(x-1)$ y $h(x) = f(x+2)$ usando transformaciones de funciones.

Solución.





$\square$

1.4. Traslación vertical

Sea f una función de variable real y $b > 0$.

- Si $g(x) = f(x) + b$ entonces el punto $(a, g(a)) = (a, f(a) + b)$ en la gráfica de $y = g(x)$ resulta de trasladar b unidades hacia arriba el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de $y = f(x)$.

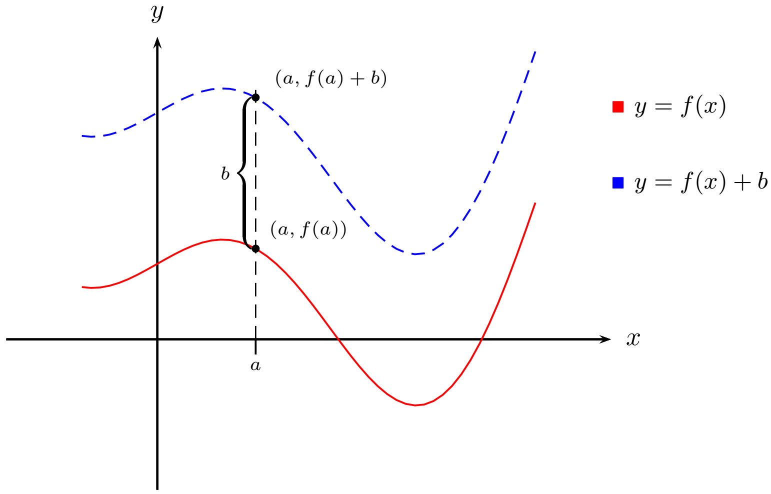


Figura 5. Traslación vertical hacia arriba

- Si $g(x) = f(x) - b$ entonces el punto $(a, g(a)) = (a, f(a) - b)$ en la gráfica de $y = g(x)$ resulta de trasladar b unidades hacia abajo el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de $y = f(x)$.

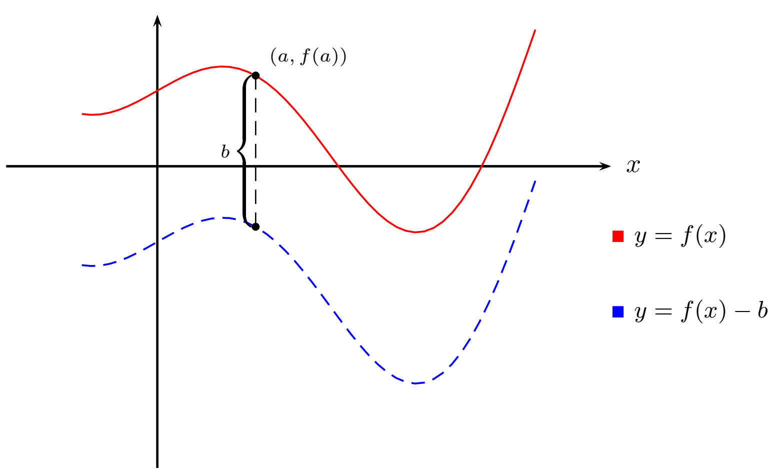
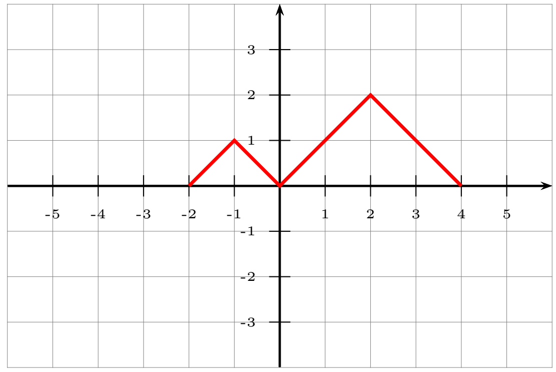


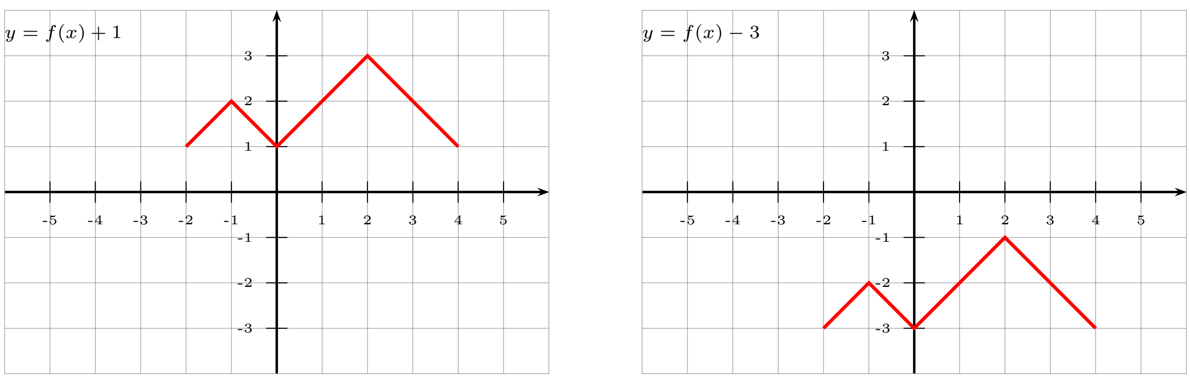
Figura 6. Traslación vertical hacia abajo

Ejemplo. Se da la gráfica de una función f en su dominio



Trace la gráfica de $g(x) = f(x) + 1$ y $h(x) = f(x) - 3$ usando transformaciones de funciones.

Solución.



$\square$

1.5. Elongación y compresión horizontal

Sea f una función de variable real y $g(x) = f(\alpha x)$ para $\alpha > 0$. Si f tiene por dominio un intervalo, sin pérdida de generalidad $[a, b]$, entonces el dominio de g es $[a/\alpha, b/\alpha]$, luego

- Si $0 < \alpha < 1$, entonces el dominio de g se elongó en α y su gráfica estará dada por

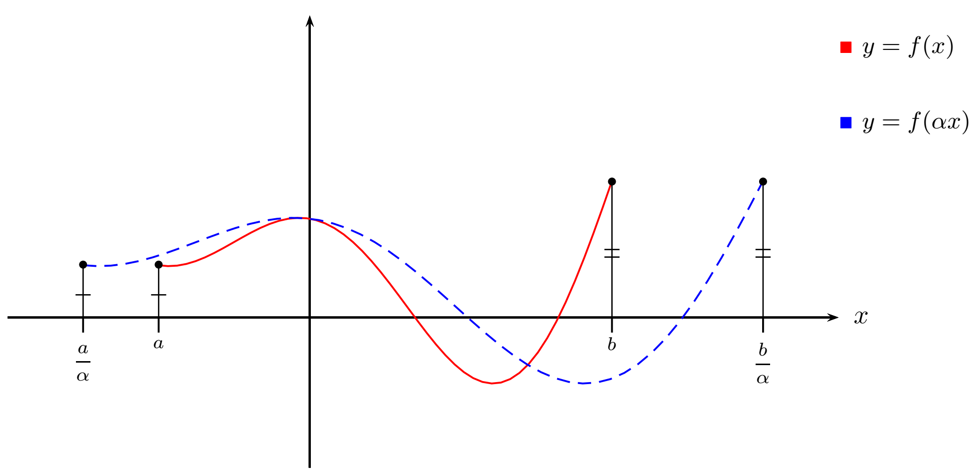


Figura 7. Elongación horizontal $(0 < \alpha < 1)$

- Si $\alpha > 1$, entonces el dominio de g se comprime en α y su gráfica estará dada por

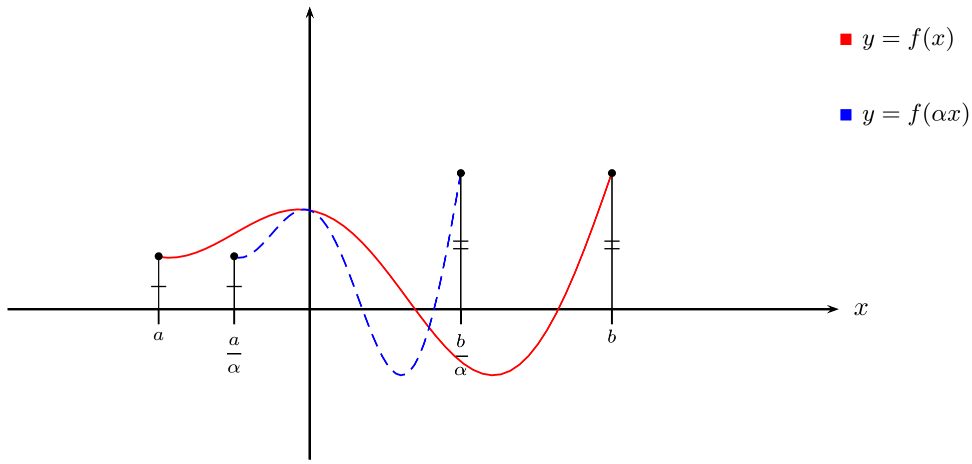
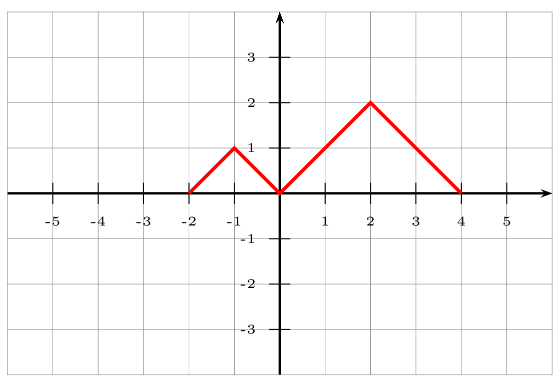


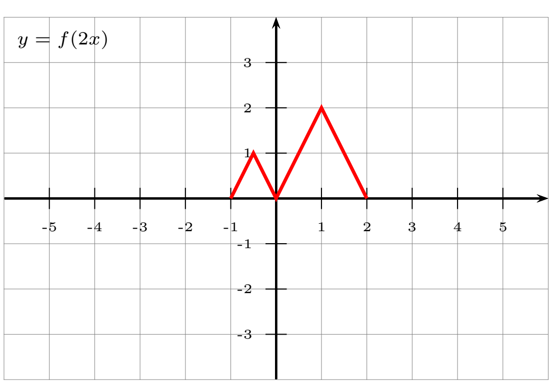
Figura 8. Compresión horizontal ($\alpha > 1$)

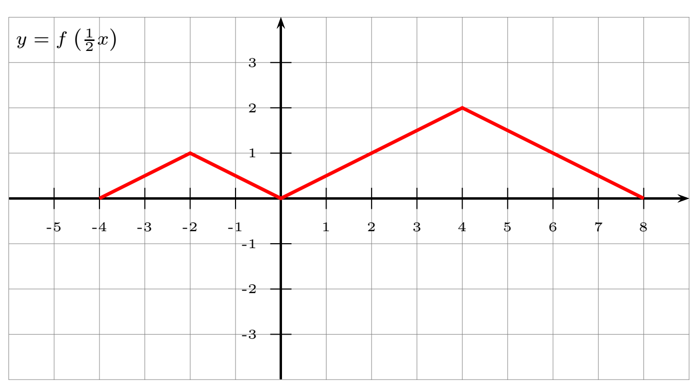
Ejemplo. Se da la gráfica de una función f en su dominio



Trace la gráfica de $g(x) = f(2x)$ y $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ usando transformaciones de funciones.

Solución.





$\square$

1.6. Elongación y compresión vertical

Sea f una función de variable real y $g(x) = Af(x)$ para $A > 0$.

- Si $0 < A < 1$,

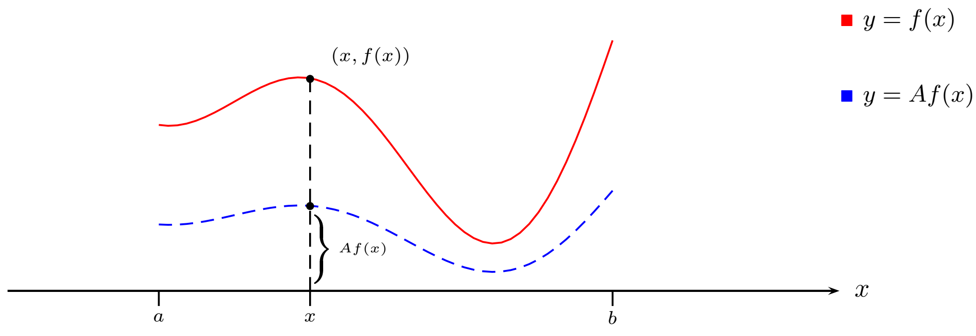


Figura 9. Compresión vertical $(0 < A < 1)$

- Si $A > 1$,

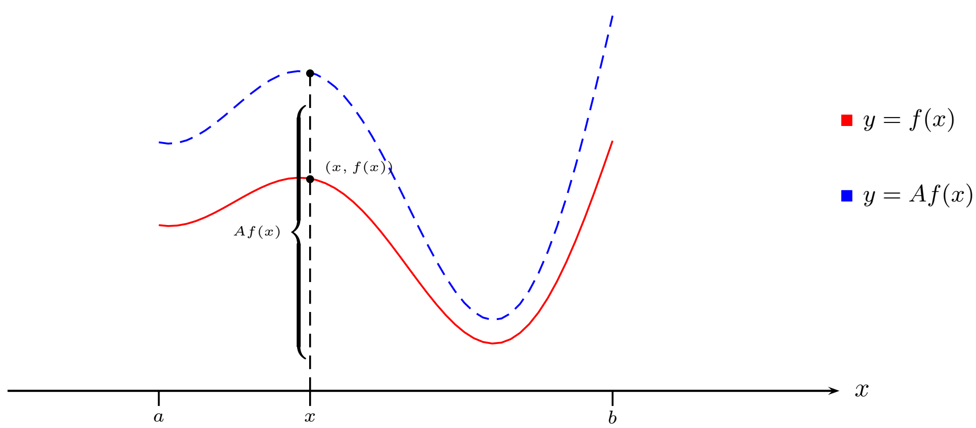
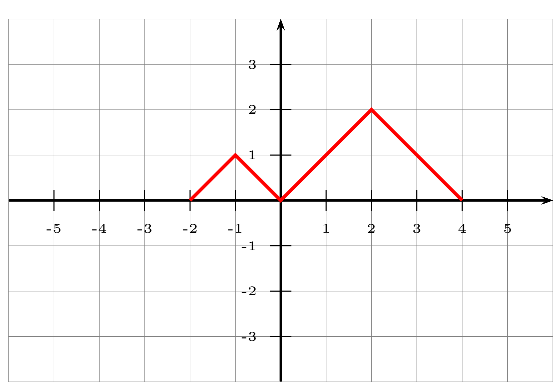


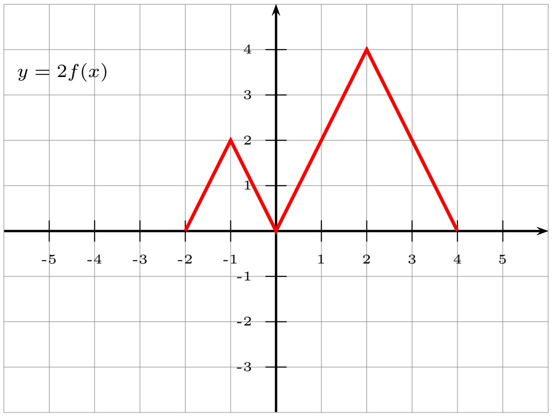
Figura 10. Elongación vertical $(A > 1)$

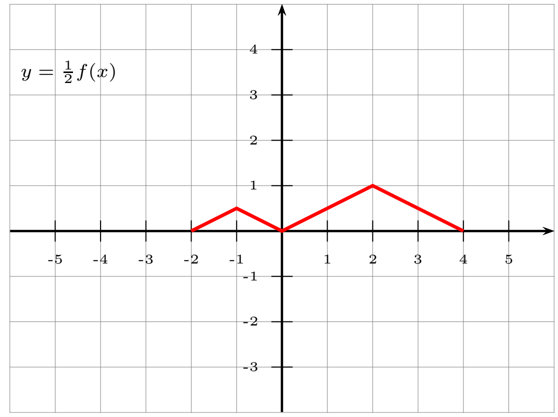
Ejemplo. Se da la gráfica de una función f en su dominio



Trace la gráfica de $g(x) = 2f(x)$ y $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$ usando transformaciones de funciones.

Solución.



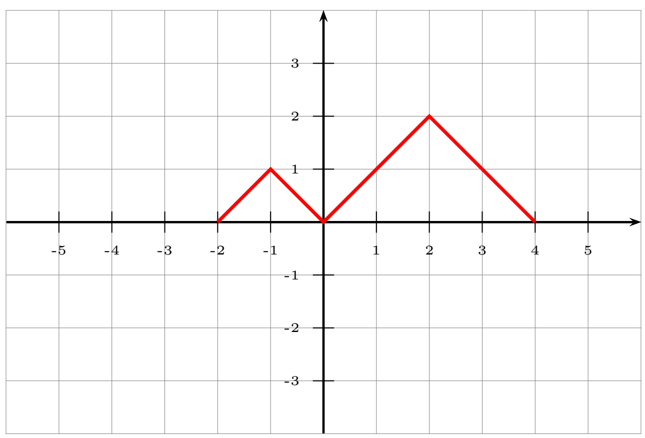


$\square$

Nota. Para trazar la gráfica de $y = Af(\alpha(x - a)) + b$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$ se siguen los siguientes pasos:

1. Trasladas horizontalmente a unidades.
2. Elongar/comprimir horizontalmente en un factor de $|\alpha|$. Si $\alpha < 0$, reflejar en torno al eje Y.
3. Elongar/comprimir verticalmente en un factor de $|A|$. Si $A < 0$, reflejar en torno al eje X.
4. Trasladar verticalmente b unidades.

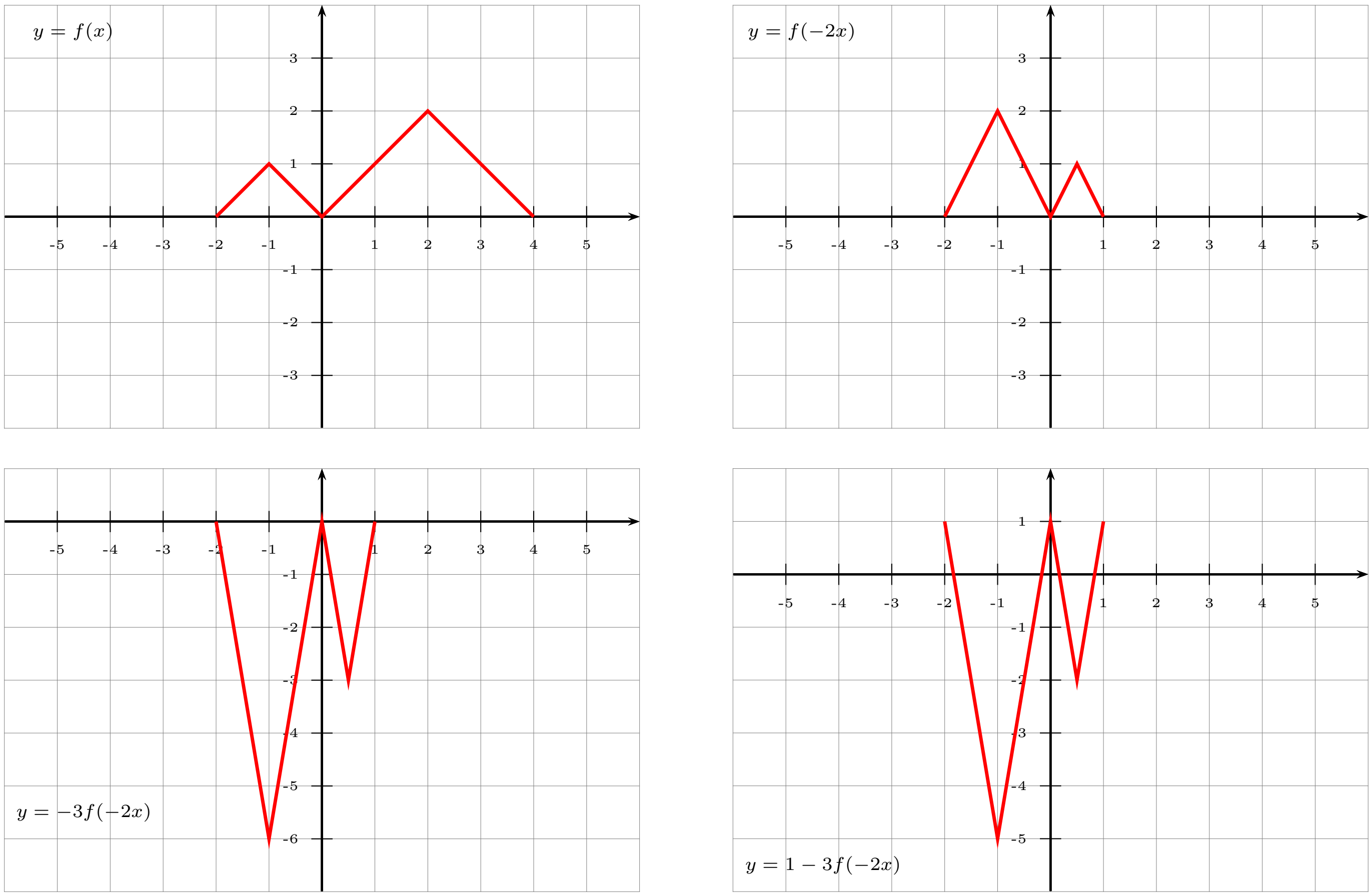
Ejemplo. Se da la gráfica de una función f en su dominio



Describa en palabras las transformaciones que se aplican a la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de $y = 1 - 3f(-2x)$. Trace la gráfica de $y = 1 - 3f(-2x)$.

Solución.

1. No hay traslación horizontal.
2. Comprimir horizontalmente en un factor de 2 y reflejar en torno al eje Y.
3. Elongar verticalmente en un factor de 3, luego reflejar en torno al eje X.
4. Trasladar verticalmente 1 unidad.



$\square$

Ejercicio (alumno)**.** Trace la gráfica de $y = 3-2(x-1)^2$ a partir de la gráfica de $y = x^2$. Describa en palabras las transformaciones que se aplican a la gráfica de $y = x^2$ para obtener la gráfica de $y = 3 - 2(x-1)^2$

Ejercicio (alumno)**.** A la función $f(x) = |x|$ se le aplican transformaciones para obtener una nueva función g, en el siguiente orden:

1. contraer verticalmente en un factor de $\dfrac{1}{2}$,
2. desplazar a la izquierda 3 unidades,
3. desplazar 5 unidades hacia abajo.

Determine la función g resultante y trace su gráfica.

Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, llene el espacio en blanco con la dirección apropiada: *izquierda*, *derecha*, *arriba*, *abajo*.

   a) La gráfica de $y = f(x) + 3$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar 3 unidades hacia ____________

   b) La gráfica de $y = f(x + 3)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar 3 unidades hacia ____________

   c) La gráfica de $y = f(x) - 3$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar 3 unidades hacia ____________

   d) La gráfica de $y = f(x - 3)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar 3 unidades hacia ____________

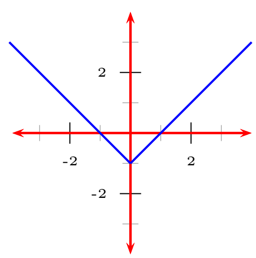
2. En cada uno de los siguientes ejercicios, llene el espacio en blanco con la reflexión apropiada: *eje* X, *eje* Y.

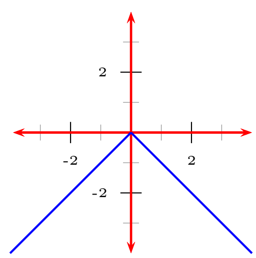
   a) La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al reflejar en el ____________

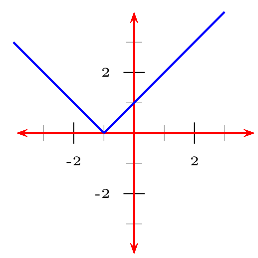
   b) La gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al reflejar en el ____________

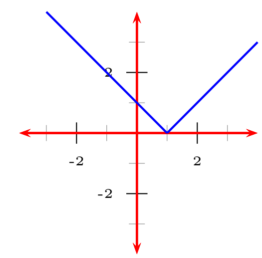
3. Relacione la gráfica con la función, escribiendo la letra correspondiente al lado de la gráfica.

   a) $y = |x + 1|$ *b*) $y = |x| - 1$ *c*) $y = |x - 1|$ *d*) $y = -|x|$

   □ 

   □ 

   □ 

   □ 

4. ¿Qué transformaciones se deben realizar para obtener la gráfica de $f(x) + 5$ a partir de la gráfica de f?

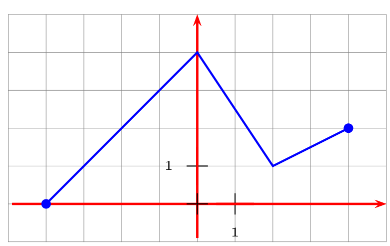
5. ¿Qué transformaciones se deben realizar para obtener la gráfica de $-2f(x)$ a partir de la gráfica de f?

6. ¿Qué transformaciones se deben realizar para obtener la gráfica de $3f(x) - 2$ a partir de la gráfica de f?

7. ¿Qué transformaciones se deben realizar para obtener la gráfica de $2f(x + 2) + 2$ a partir de la gráfica de f?

8. ¿Qué transformaciones se deben realizar para obtener la gráfica de $f(2x) - 1$ a partir de la gráfica de f?

9. Dada la gráfica de f con dominio $[-4, 4]$



   Determine la gráfica de $y = -2f(x + 1) + 3$ e $y = \dfrac{1}{2}f(-x + 1) - 3$.

10. A la función $f(x) = \sqrt{x}$ se le aplican transformaciones para obtener una nueva función g, en el siguiente orden:

    a) alargar verticalmente en un factor de 3,

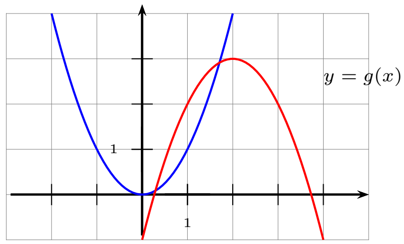
    b) desplazar a la izquierda 2 unidades,

    c) reflejar en torno al eje Y,

    d) desplazar hacia arriba 1 unidad.

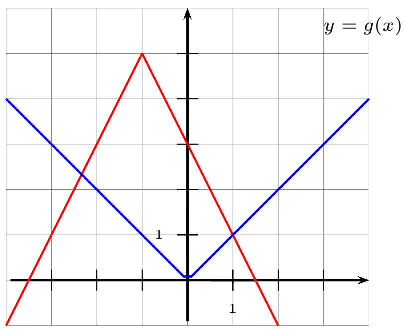
    Determine la función g resultante y trace su gráfica.

11. La gráfica de g se obtiene mediante transformaciones de la función $f(x) = x^2$.



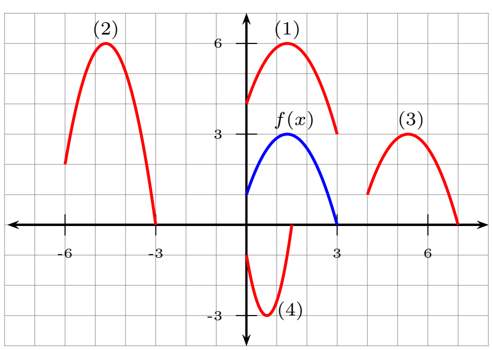
Determine una expresión algebraica para la función g.

12. La gráfica de g se obtiene mediante transformaciones de la función $f(x) = |x|$.



Determine una expresión algebraica para la función g.

13. Se dan las gráficas de $y = f(x)$ y transformaciones de ella. Relacione cada ecuación con su gráfica, escribiendo a su lado el número que corresponde.



_____ $y = f(x-4)$

_____ $y = f(x) + 3$

_____ $y = 2f(x+6)$

_____ $y = -f(2x)$

14. Utilice transformaciones de funciones para determinar las gráficas de las siguientes curvas

a) $y = 2 - (x+2)^2$ *b*) $y = -\sqrt{-x} + 1$ *c*) $y = 1 + \dfrac{1}{x-3}$ *d*) $y = |2x+4| - 1$

Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.