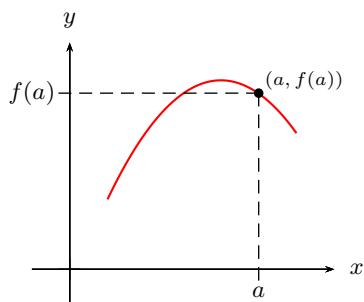


CLASE 2: GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL

- Esbozar la gráfica de una función a partir de una tabla de datos.
- Determinar el valor de una función a partir de su representación gráfica.
- Trazar la gráfica de una función.
- Determinar una fórmula para una función dada su gráfica.
- Identificar si una curva corresponde a la gráfica de una función.
- Identificar si una ecuación puede ser representada como una función.
- Representar algebraicamente una curva como función.
- Inferir información a partir de la gráfica de una función.

1. Gráficas de funciones

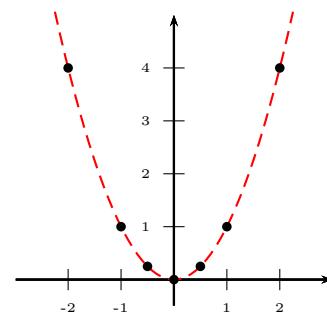
La gráfica de una función f corresponde a todos los pares ordenados $(a, f(a))$, para $a \in \text{Dom}(f)$.



Ejemplo. Haga una tabla de valores para $f(x) = x^2$ y trace su gráfica.

Solución.

x	y
-2	4
-1	1
-1/2	1/4
0	0
1/2	1/4
1	1
2	4



Ejercicio (alumno). Haga una tabla de valores para $f(x) = x^3$ y trace su gráfica.

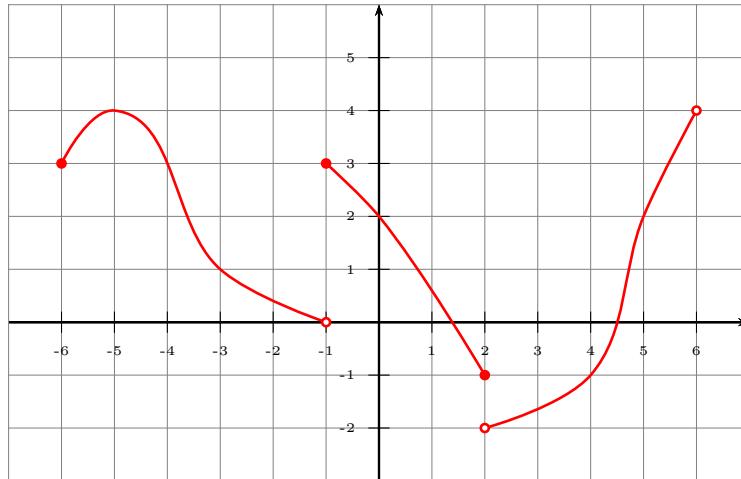
□

Ejemplo. A partir de la gráfica de la función f determine los siguientes valores:

1. $f(-6)$

2. $f(-1)$

3. $f(2)$

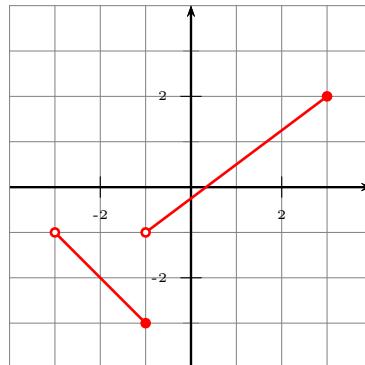


□

Ejercicio (alumno). A partir de la gráfica del ejemplo anterior, calcular el valor de la siguiente expresión.

$$E = f(0)f(2) - f(-4)f(4)$$

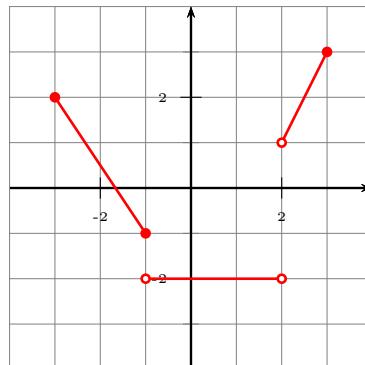
Ejemplo. Determine una fórmula para la función f que se presenta en la gráfica.



¿Cuál es el dominio y recorrido de f ?

□

Ejemplo. Determine una fórmula para la función que se presenta en la gráfica.



¿Cuál es el dominio y recorrido de f ?

□

A continuación presentamos las gráficas de las funciones *lineal*, *cuadrática*, *valor absoluto*, *raíz cuadrada* y *racional* $\frac{1}{x}$.

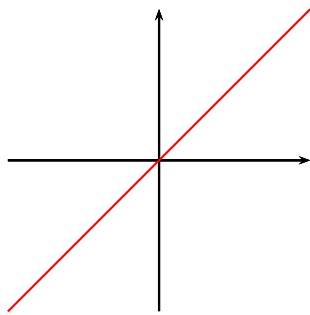


Figura 1. Función lineal: $f(x) = x$

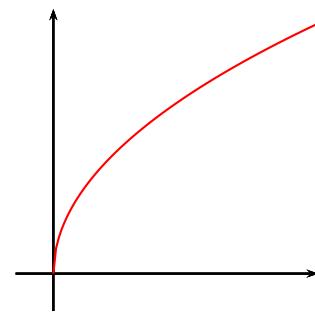


Figura 4. Función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$

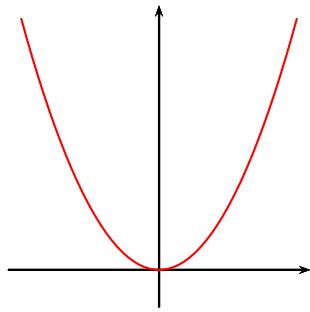


Figura 2. Función cuadrática: $f(x) = x^2$

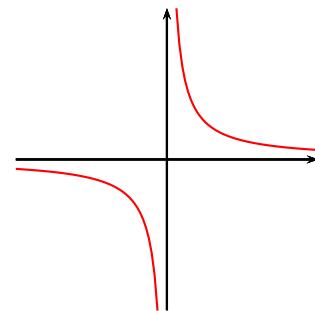


Figura 5. Función racional: $f(x) = \frac{1}{x}$

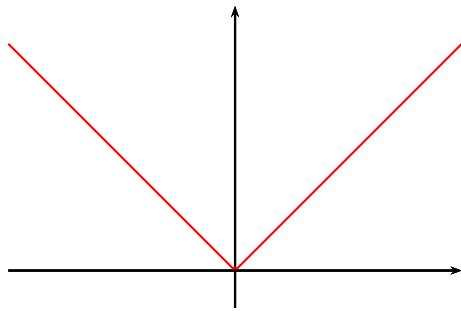


Figura 3. Función valor absoluto: $f(x) = |x|$

Ejercicio (alumno). A partir de su gráfica determine el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

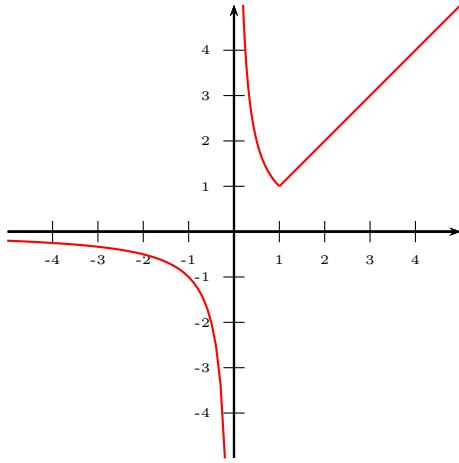
1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = |x|$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo. Trace la gráfica de la función por tramos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Identifique el dominio de f y, a partir de la gráfica, deduzca su recorrido.

Solución. La gráfica de f es



El dominio de f es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y el recorrido es $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. \square

Ejercicio (alumno). Trace la gráfica de la función por tramos

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Identifique el dominio de f y, a partir de la gráfica, deduzca su recorrido.

Nota. Una curva en el plano es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical corta a la curva más de una vez.

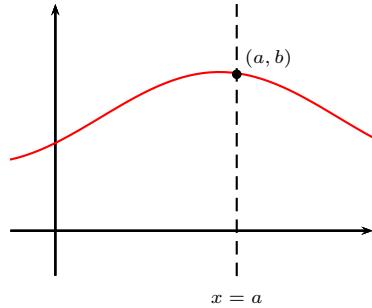


Figura 6. Gráfica de una función

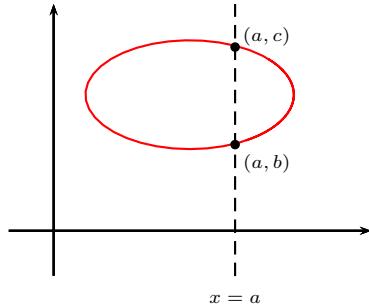


Figura 7. No es gráfica de una función

esto se debe a que a cada a en el dominio de una función f se le asocia un único elemento en el recorrido $f(a)$.

Ejemplo. Determine cuál(es) de las siguientes ecuaciones define a y como función de x . Si la ecuación define una función, escriba la función asociada. Si la ecuación no define una curva, justifique su respuesta.

1. $2x + 3y + 1 = 0$

2. $x + y^2 - 1 = 0$

Solución.

1. Despejando de la ecuación la variable y tendremos

$$y = -\frac{1+2x}{3} \implies f(x) = -\frac{1+2x}{3}$$

2. Despejando de la ecuación la variable y tendremos

$$y^2 = 1 - x \implies y = \pm\sqrt{1-x}$$

luego, a cada $x \in (-\infty, 1]$ le corresponden dos valores de y . Por lo tanto, la ecuación no define una función.

□

Ejercicio (alumno). Determine cuál(es) de las siguientes ecuaciones define a y como función de x . Si la ecuación define una función, escriba la función asociada. Si la ecuación no define una curva, justifique su respuesta.

1. $x + |y| = 1$

2. $x^2y - xy + 2 = 0$

EJERCICIOS

1. Trace la gráfica de las siguientes funciones

a) $f(x) = -x + 3$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = 4 - x^2$

d) $f(x) = x^2 - 2x$

e) $f(x) = x + |x|$

f) $f(x) = |2x - 2|$

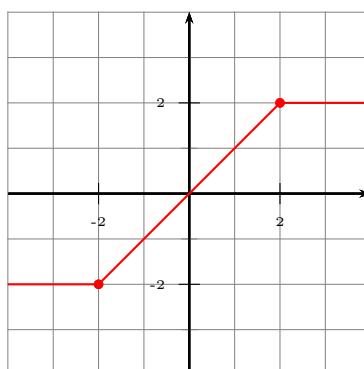
g) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 2 \\ x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$

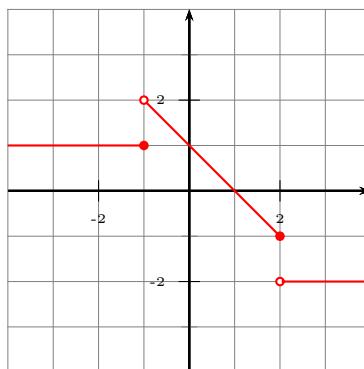
i) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 2 \\ x & x > 2 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$

2. La gráfica corresponde a una función definida por tramos. Determine una fórmula para la función en la forma indicada.

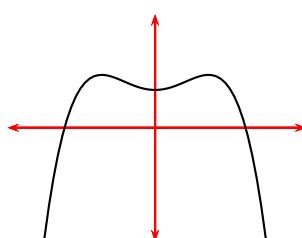


3. La gráfica corresponde a una función definida por tramos. Determine una fórmula para la función en la forma indicada.

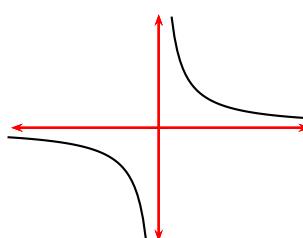


4. Determine cuál(es) de las siguientes gráficas corresponde a la gráfica de una función.

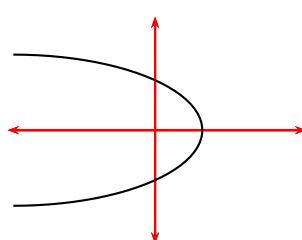
a)



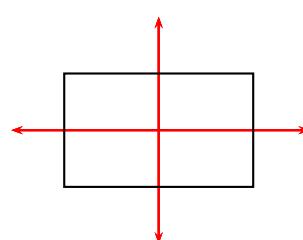
c)



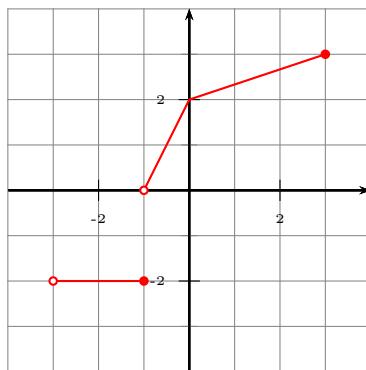
b)



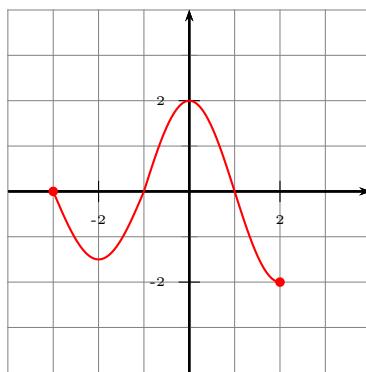
d)



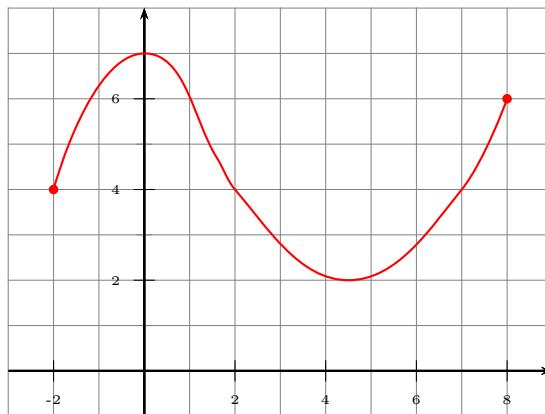
5. Determine el dominio y recorrido de la función que se presenta en la gráfica.



6. Determine el dominio y recorrido de la función que se presenta en la gráfica. Determine los valores de x en el dominio para los que $f(x) = 0$.



7. Determine el dominio y recorrido de la función que se presenta en la gráfica. Determine los valores de x en el dominio para los que $g(x) = 4$.



8. Determine cuál(es) de las siguientes ecuaciones define a y como función de x .

a) $x^2 + 2y = 4$ b) $x = y^2$ c) $x + y^2 = 9$ d) $x^2y + y = 1$ e) $2|x| + y = 0$ f) $x = y^3$

9. Determine una función f cuya gráfica sea una recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$.

10. Determine una función f cuya gráfica sea la mitad inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.