Clase 1: Definición de funciones reales

- Calcular el valor de una función en un conjunto de datos.
- Representar verbalmente la acción de una función sobre un elemento en el dominio.
- Determinar la rama de la función a evaluar dado el valor numérico en el dominio.
- Determinar el dominio de una función.
- Formular en término de funciones reales un problema y calcular su solución.

1. Definición, dominio y recorrido

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento a de un conjunto A un único elemento b de un conjunto B, por la relación

$$f(a) = b$$

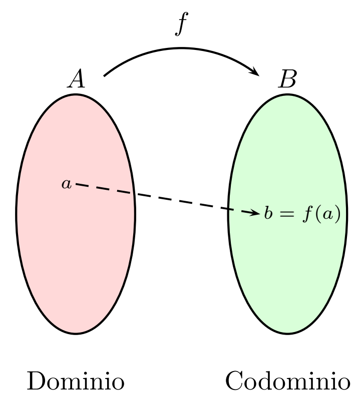
En tal caso denotaremos

$$f : A \to B$$

El conjunto A es denominado **dominio** de f.

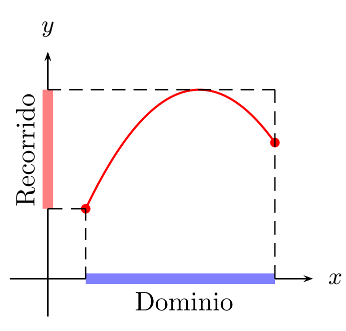
El conjunto B es denominado **codominio** de f.

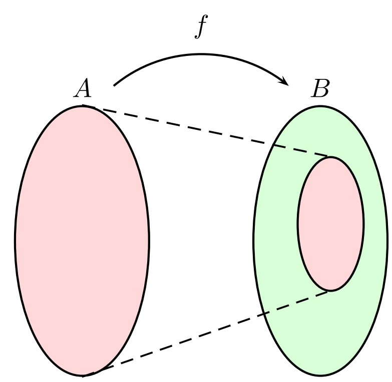
El elemento $f(a)$ en B es denominado **imagen de a bajo f**.



El **recorrido** o **imagen** de una función f son todos los elementos del codominio que son imagen de elementos del dominio.

$$\text{Rec}(f) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$$





Ejemplo. Una función está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 - 1$$

1. Exprese verbalmente cómo actúa f sobre x.
2. Calcular $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

Solución.

1. "Elevar al cuadrado (la variable x) y restar uno"

2.

$$f(3) = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$
$$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 1 = 5 - 1 = 4$$

□

Ejemplo. La función g está definida por tramos

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcular $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$.

Solución. La función g tiene dos representaciones algebraicas:

$$g(x) = x^2 \quad \text{si} \quad x \leq 0$$
$$g(x) = x + 1 \quad \text{si} \quad x > 0$$

De este modo,

$$g(-2) = (-2)^2 = 4 \qquad \text{ya que} \quad x = -2 \leq 0$$
$$g(0) = (0)^2 = 0 \qquad \text{ya que} \quad x = 0 \leq 0$$
$$g(1) = (1) + 1 = 2 \qquad \text{ya que} \quad x = 1 > 0$$

□

Ejercicio. Considere la función por tramos

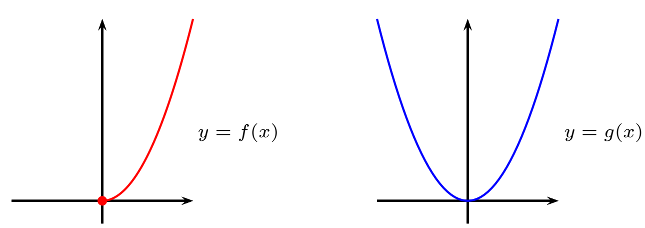
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Exprese verbalmente como actúa f sobre la variable x.
2. Calcular $f(-1)$, $f(1)$ y $f(3/2)$.

Nota. Una función está determinada por su representación algebraica y su dominio. Por ejemplo,

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 5$$
$$g(x) = x^2 \qquad -\infty < x < \infty$$

tienen la misma representación algebraica, pero son diferentes ya que poseen dominios diferentes.



Nota. Cuando la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función son todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.*

Ejemplo. Determine el dominio de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$
2. $g(x) = \sqrt{x}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$

Solución.

1. La función está bien definida cada vez que el denominador es diferente de cero: $x-4 \neq 0$. De este modo, se deduce que el dominio de f está dado por $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

2. La expresión $\sqrt{x}$ está bien definida cada vez que $x \geq 0$. Por lo tanto $\mathrm{Dom}(g) = [0, \infty)$.

3. La función
$$h(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$$
está bien definida cuando $h_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $h_2(x) = \sqrt{x}$ están bien definidas (de manera simultánea). Es claro que
$$\mathrm{Dom}(h_1) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Dom}(h_2) = [0, \infty)$$
Luego, los números reales x para los cuales $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ está bien definida son
$$x \in ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) \cap [0, \infty) = [0, 1) \cup (1, \infty)$$
Por lo tanto, el dominio de h es $[0, 1) \cup (1, \infty)$.

$\square$

Nota. Si $f = f_1 + f_2$ ó $f = f_1 \cdot f_2$ entonces
$$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$$
Esto se debe a que ambas funciones (f_1 y f_2) deben estar bien definidas, simultáneamente.

Recuerde: Toda resta es una suma, toda división es un producto.

Ejercicio. Determine el dominio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 2}$.

Ejemplo. Una compañia de taxis cobra \$300 por el primer kilómetro (o parte de kilómetro) y \$80 por cada doscientos metros (o parte). Determine una función costo C de un viaje como función definida por partes de la distancia recorrida (en kilómetros) para $0 < x < 2$. Calcule el costo de recorrer 1350 metros en un taxi de esta compañia.

Solución.
$$C(x) = \begin{cases} 300 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 380 & \text{si } 1 < x \leq 1{,}2 \\ 460 & \text{si } 1{,}2 < x \leq 1{,}4 \\ 540 & \text{si } 1{,}4 < x \leq 1{,}6 \\ 620 & \text{si } 1{,}6 < x \leq 1{,}8 \\ 700 & \text{si } 1{,}8 < x < 2 \end{cases}$$
El costo por recorrer 1350 metros (o 1,35 kilómetros) es
$$C(1{,}35) = 460 \quad \text{pesos}$$

$\square$

Ejercicio. El precio por encomienda en una empresa de correos es de \$2000 por 1 kilo o menos, más \$150 por cada 100 gramos adicionales o fracción. Determine una función precio P por encomienda como una función definida por partes del peso x (en kilos) de la encomienda, con $0 < x < 3$. Calcule el precio de enviar una encomienda cuyo peso es 2430 gramos.

Ejercicios

1. Para cada enunciado determine una función f, en la variable x, que realice la operación.

   a) "sumar 3, luego multiplicar por 2"
   b) "restar 5, elevar al cuadrado, luego multiplicar por 3"
   c) "sumar 1, tomar el inverso multiplicativo, restar 1"

2. Para cada una de las siguientes funciones escribir un enunciado que la caracterice

   a) $f(x) = (x-1)^2 + 2$ b) $g(x) = \sqrt{2x-1}$ c) $h(x) = 1 + |x|$

3. Evalúe las siguientes funciones en los valores indicados.

   a) $f(x) = x^3 + 2x$
      - $f(-2)$
      - $f\left(\frac{1}{3}\right)$
      - $f(0{,}2)$

   b) $f(x) = 2x + 1$
      - $f(-2)$
      - $f(a+1)$
      - $f(b - \frac{1}{2})$

   c) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$
      - $f\left(\frac{1}{2}\right)$
      - $f(a-1)$
      - $f\left(\frac{1}{a}\right)$

4. Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$

   - $f(-3)$
   - $f(0)$
   - $f(2)$
   - $f(5)$

5. Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados. $f(x) = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x \leq 3 \\ (x-3)^2 & x > 3 \end{cases}$

   - $f(-5)$
   - $f(0)$
   - $f(3)$
   - $f(6)$

6. Determine el dominio de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = x^2 + 1$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-3}$
   c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-6}$
   e) $f(x) = \sqrt{x-5}$
   f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-2x-8}$

7. En una cierta ciudad la velocidad máxima permitida en autopista es de 130 kilómetros/hora y la mínima es 80. La multa F por violar los lmites es \$3000 por cada kilómetro arriba del máximo o bajo el mínimo.

   a) Si x es la velocidad a la cuál una persona está viajando, complete las expresiones que definen a F como una función por partes.
   b) Calcular

      1) $F(60)$ 2) $F(100)$ 3) $F(160)$

Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.