Clase 2: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

- Reconocer la relación entre el logaritmo y la exponencial.
- Calcular expresiones que involucran logaritmo mediante representación del argumento como potencia de la base del logaritmo.
- Reconocer las propiedades del logaritmo.
- Usar las leyes del logaritmo para calcular expresiones logarítmicas.
- Usar las leyes del logaritmo para expandir y combinar expresiones logarítmicas.
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

1. Logaritmo

Para todo número real positivo $a \neq 1$ se define el **logaritmo con base** a, que denotaremos $\log_a$, por la relación

$$\log_a(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^y = x$$

De la definición anterior se desprende que $\log_a(x)$ es el *único* número real que satisface

$$a^{\log_a(x)} = x$$

Por lo tanto, $\log_a(x)$ es el *exponente* al cual la base a debe ser elevado para obtener x.

Ejemplo.

1. Para determinar $y = \log_2(8)$ recurrimos a la definición, vale decir

$$\begin{aligned} y = \log_2(8) &\quad\Longleftrightarrow\quad 2^y = 8 && \left(2^{\log_2(8)} = 8\right) \\ &\quad\Longleftrightarrow\quad 2^y = 2^3 && \left(2^{\log_2(8)} = 2^3\right) \\ &\quad\Longleftrightarrow\quad y = 3 && (\log_2(8) = 3) \end{aligned}$$

   Por lo tanto $\log_2(8) = 3$

2. Para determinar $y = \log_{10}(0{,}01)$ recurrimos a la definición, vale decir

$$\begin{aligned} y = \log_{10}(0{,}01) &\quad\Longleftrightarrow\quad 10^y = 0{,}01 && \left(10^{\log_{10}(0{,}01)} = 0{,}01\right) \\ &\quad\Longleftrightarrow\quad 10^y = 10^{-2} && \left(10^{\log_{10}(0{,}01)} = 10^{-2}\right) \\ &\quad\Longleftrightarrow\quad y = -2 && (\log_{10}(0{,}1) = -2) \end{aligned}$$

   Por lo tanto $\log_{10}(0{,}1) = -1$

3. Para determinar $y = \log_9(3)$ recurrimos a la definición, vale decir

$$\begin{aligned} y = \log_9(3) &\quad\Longleftrightarrow\quad 9^y = 3 && \left(9^{\log_9(3)} = 3\right) \\ &\quad\Longleftrightarrow\quad 9^y = 9^{1/2} && \left(9^{\log_9(3)} = 9^{1/2}\right) \\ &\quad\Longleftrightarrow\quad y = 1/2 && (\log_9(3) = 1/2) \end{aligned}$$

   Por lo tanto $\log_9(3) = \dfrac{1}{2}$

□

Ejercicio (alumno)**.** Calcular

1. $\log_3(91)$
2. $\log_5(0{,}04)$
3. $\log_4(8)$

1.1. Propiedades del Logaritmo

Propiedades del Logaritmo

P1. $\log_a(1) = 0$ **P2.** $\log_a(a) = 1$ **P3.** $\log_a(a^x) = x$ **P4.** $a^{\log_a(x)} = x$

Demostración.

1. De la definición

$$\begin{aligned} y = \log_a(1) \quad &\iff \quad a^y = 1 \\ &\iff \quad a^y = a^0 \\ &\iff \quad y = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\log_a(1) = 0$.

2. De la definición

$$\begin{aligned} y = \log_a(a) \quad &\iff \quad a^y = a \\ &\iff \quad a^y = a^1 \\ &\iff \quad y = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\log_a(a) = 1$.

3. De la definición

$$\begin{aligned} y = \log_a(a^x) \quad &\iff \quad a^y = a^x \\ &\iff \quad y = x \end{aligned}$$

Por lo tanto $\log_a(a^x) = x$.

4. Si $y = \log_a(x)$ entonces $a^y = x$. Luego,

$$a^{\log_a(x)} = a^y = x$$

Por lo tanto $a^{\log_a(x)} = x$.

$\blacksquare$

El logaritmo con base 10 será denominado **logaritmo común** y se denota omitiendo la base

$$\log(x) = \log_{10}(x)$$

Ejemplo. Calcular el valor de la siguientes expresión

$$\log_3(9) - \log_4(2) + \log(10)$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\log_3(9) - \log_4(2) + \log(10) &= \log_3(3^2) - \log_4(4^{1/2}) + \log(10) \\
&= \log_3(3^2) - \log_4(4^{1/2}) + \log(10) && \textbf{P3, P3, P1} \\
&= 2 - \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

□

1.2. Leyes del Logaritmo

Leyes del Logaritmo

L1. $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$

L2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$

L3. $\log_a\left(A^C\right) = C\log_a(A)$

Demostración.

1. Sean $u = \log_a(A)$ y $v = \log_a(B)$. Luego, a partir de la definición del logaritmo se tendrá

   $$A = a^u \qquad \text{y} \qquad B = a^v$$

   De este modo,

   $$\log_a(AB) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v}) = u + v = \log_a(A) + \log_a(B)$$

2. A partir de la **Ley 1** se tendrá

   $$\log_a(A) = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a(B)$$

   Por lo tanto,

   $$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$$

3. Si $u = \log_a(A)$ entonces $A = a^u$ y

   $$\log_a(A^C) = \log_a\left((a^u)^C\right) = \log_a\left(a^{uC}\right) = uC = C\log_a(A)$$

■

Ejemplo.

1.

$$\begin{aligned}
\log_4(2) + \log_4(32) &= \log_4(2\cdot 32) && \textbf{Ley 1} \\
&= \log_4(64) \\
&= \log_4(4^3) = 3 && \textbf{P3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \log_3(162) - \log_3(2) &= \log_3\left(\frac{162}{2}\right) && \textbf{Ley 2} \\ &= \log_3(81) \\ &= \log_4(3^4) = 4 && \textbf{P3} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \log\left(\sqrt{8}\right) &= \log\left(2^{3/2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\log(2) && \textbf{Ley 3} \end{aligned}$$

□

Ejercicio (alumno)**.** Calcular el valor de la siguiente expresión

$$\frac{\log_2(160) - \log_2(5)}{\log_6(18) + \log_6(2)}$$

1.3. Expansión y Combinación de Expresiones Logarítmicas

Ejemplo.[Expandir] Use las leyes del logaritmo para expandir la siguiente expresión

$$\log_3\left(\frac{x^4y^5}{8}\right)$$

Solución.

$$\begin{aligned} \log_3\left(\frac{x^4y^5}{8}\right) &= \log_3(x^4) + \log_3(y^5) - \log_3(2^3) && \textbf{Ley 1 + Ley 2} \\ &= 4\log_3(x) + 5\log_3(y) - 3\log_3(2) && \textbf{Ley 3} \end{aligned}$$

□

Ejercicio (alumno)**.** Use las leyes del logaritmo para expandir la siguiente expresión

$$\log\left(\frac{x^2y}{\sqrt{z}}\right)$$

Ejemplo.[Combinar] Use las leyes del logaritmo para combinar la siguiente expresión

$$\frac{1}{2}\log_2(x+y) - 3\log_2(y) + 4\log_2(z)$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log_2(x+y) - 3\log_2(y) + 4\log_2(z) &= \log_2\left(\sqrt{x+y}\right) - \log_2(y^3) + \log_2(z^4) && \textbf{Ley 3} \\ &= \log_2\left(\frac{\sqrt{x+y}}{y^3}\right) + \log_2(z^4) && \textbf{Ley 2} \\ &= \log_2\left(\frac{z^4\sqrt{x+y}}{y^3}\right) && \textbf{Ley 1} \end{aligned}$$

□

Ejercicio. Use las leyes del logaritmo para combinar la siguiente expresión

$$2(\log_5(x) + 2\log_5(y) - 3\log_5(z) + 1)$$

2. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

El siguiente resultado será de vital importancia para la resolución de ecuaciones de tipo exponencial y logarítmica.

Teorema

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, se cumple

1. Si $a^x = a^y$ entonces $x = y$.
2. Si $\log_a(x) = \log_a(y)$ entonces $x = y$.

En el teorema anterior es importante tener presente que los exponentes pueden ser cualquier número real y que el logaritmo solo puede ser evaluado en números reales positivos.

2.1. Ecuaciones Exponenciales

Ejemplo.[Igualar Base] Resolver las ecuaciones exponenciales

1. $\sqrt[2x+1]{3^{x-1}} = \sqrt{81}$.
2. $3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} = 63$.

Solución. Para resolver cada una de estas ecuaciones igualaremos base, para luego usar el teorema anterior.

1. Resolvamos la ecuación $\sqrt[2x+1]{3^{x-1}} = \sqrt{81}$

$$\begin{aligned} \sqrt[2x+1]{3^{x-1}} &= \sqrt{81} \\ 3^{\frac{x-1}{2x+1}} &= 3^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x-1}{2x+1} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -1 \end{aligned}$$

   Así, la ecuación $\sqrt[2x+1]{3^{x-1}} = \sqrt{81}$ tiene por solución $x = -1$.

2. Resolvamos la ecuación $3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} = 63$

$$\begin{aligned} 3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} &= 63 \\ 3^x\left(3 - 1 + \frac{1}{3}\right) &= 63 \\ 3^x \cdot \frac{7}{3} &= 3^2 \cdot 7 \\ 3^{x-1} &= 3^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x - 1 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 3 \end{aligned}$$

   Así, la ecuación $3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} = 63$ tiene por solución $x = 3$.

□

Ejemplo.[Cambio de Variable] Resolver la ecuación $5^x - \dfrac{2}{5^x} = 1$.

Solución. Para resolver cada una de estas ecuaciones haremos un *cambio de variable* que convertirá nuestra ecuación exponencial en una ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned} 5^x - \frac{2}{5^x} &= 1, \qquad u = 5^x \\ u - \frac{2}{u} &= 1 \\ u^2 - u - 2 &= 0 \\ (u-1)(u+2) &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u = -2,\, 1 \end{aligned}$$

Pero $u = 5^x$, por tanto

$$5^x = -2 \qquad\qquad 5^x = 1$$

$$\text{no tiene solución} \qquad\qquad 5^x = 5^0 \implies x = 0$$

□

Ejercicio (alumno)**.** Resolver la ecuación $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$.

Ejemplo.[Logaritmo] Resolver la siguiente ecuación

$$2^{x+1} = 6$$

Solución. Aplicando $\log_2$ en ambos lados de la igualdad tendremos

$$\begin{aligned}
2^{x+1} &= 6 && \text{Aplicar a ambos lados de la igualdad } \log_2 \\
\log_2(2^{x+1}) &= \log_2(6) \\
(x+1)\log_2(2) &= \log_2(2 \cdot 3) \\
(x+1)\log_2(2) &= \log_2(2) + \log_2(3) && \log_2(2) = 1 \\
x + 1 &= 1 + \log_2(3) \\
x &= \log_2(3)
\end{aligned}$$

Así, la ecuación $2^{x+1} = 6$ tiene como solución $x = \log_2(3)$. □

Ejercicio (alumno)**.** Resolver la siguiente ecuación $2^x - \dfrac{3}{2^{x-1}} = 1$.

2.2. Ecuaciones Logarítmicas

El siguiente ejercicio requiere recordar la definición del logaritmo,

$$y = \log_a(x) \iff x = a^y$$

Ejemplo.[Forma Exponencial] Resolver la ecuación logarítmica $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$.

Solución. En la solución de cada una de las ecuaciones usaremos la definición del logaritmo con el fin de obtener una *ecuación exponencial* equivalente a la ecuación original.

Antes de proceder con álgebra no debemos olvidar que el logaritmo NO está definido para números reales negativos o cero. Por lo tanto, los x que encontremos como soluciones deberán satisfacer las condiciones

$$x + 2 > 0 \qquad \text{y} \qquad x - 1 > 0 \tag{1}$$

Teniendo lo anterior en cuenta, procedemos a resolver la ecuación usando las propiedades del logaritmo

$$\begin{aligned}
\log(x+2) + \log(x-1) &= 1 \\
\log\left((x+2)(x-1)\right) &= 1 && \log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b) \\
(x+2)(x-1) &= 10 && \text{Definicin} \\
x^2 + x - 12 &= 0 \\
(x+4)(x-3) &= 0 && \text{Factorizar}
\end{aligned}$$

Luego, $x = -4, 3$ son los posibles candidatos a solución de la ecuación $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$. Pero $x = -4$ no satisface (1) ya que

$$(-4) + 2 = -2 \not> 0 \qquad \text{y} \qquad (-4) - 1 = -5 \not> 0$$

mientras que $x = 3$ si satisface (1),

$$(3) + 2 = 5 > 0 \qquad \text{y} \qquad (3) - 1 = 2 > 0$$

Por lo tanto, $x = 3$ es la única solución a la ecuación $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$. □

En el siguiente ejemplo ocuparemos del teorema que

$$\log(a) = \log(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

Ejemplo.[Igualar Argumento] Resolver la ecuación logatítmica $\log(x) + \log(x-1) = \log(4x)$

Solución. La ecuación logarítmica exige que

$$4x > 0, \qquad x > 0 \qquad \text{y} \qquad x - 1 > 0 \tag{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \log(x) + \log(x-1) &= \log(4x) \\ \log(x(x-1)) &= \log(4x) && \scriptstyle \log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b) \\ x(x-1) &= 4x && \scriptstyle \log(a) = \log(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b \\ x(x-5) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 0, 5$ son las posibles soluciones a la ecuación. Pero la única solución que satisface (2) es $x = 5$. □

Ejercicio. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas.

1. $\log_5(x+1) - \log_5(x-1) = 2$.
2. $\dfrac{\log(2x)}{\log(4x-15)} = 2$.

Ejemplo. Determine los valores de a para que la ecuación

$$2\log_a(\sqrt{x+2}) - 3\log_a(\sqrt[3]{x}) + \log_a(x) = 1$$

tenga solución en los reales.

Solución. La ecuación tiene las restricciones

$$x > 0 \quad \text{y} \quad x > -2$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2\log_a(\sqrt{x+2}) - 3\log_a(\sqrt[3]{x}) + \log_a(x) &= 1 \\ \log_a(x+2) - \log_a(x) + \log_a(x) &= 1 \\ \log_a(x+2) &= 1 \\ x &= a - 2 \end{aligned}$$

Dadas las restricciones, se concluye que $a > 2$. □

Ejercicios

1. Calcule el valor de las siguientes expresiones.

   a) $\log_2(6) - \log_2(15) + \log_2(20)$

   b) $\log_3(100) - \log_3(18) - \log_3(50)$

2. Demuestre que $-\ln(2-\sqrt{2}) = \ln(2+\sqrt{2})$.

3. Use las leyes del logaritmo para expandir las siguientes expresiones

   a) $\log_5\left(\frac{x}{5}\right)$

   b) $\log\left((ab)^5\right)$

   c) $\log_2\left(\frac{32}{\sqrt{a\sqrt{b+1}}}\right)$

   d) $\log\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}\right)$

4. Use las leyes del logaritmo para combinar las siguientes expresiones

   a) $\log_2(7) + 2\log_2(5)$

   b) $\log_3(a+b) - \log_3(a^2 - ab + b^2)$

   c) $\log_3(5) + 2\log_3(x) - 4\log_3(x^2+1)$

   d) $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) - 1$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones.

   a) $8^{x+1} = 2^{2x+7}$

   b) $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$

   c) $5^{x+3} - 5^{x+2} = 4$

   d) $\dfrac{50}{1+e^{-x}} = 4$

   e) $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

   f) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones logartmicas

   a) $\log_2(x+1) = 3 - \log_2(x-1)$

   b) $\log_4(x) - 3\log_4(2) = \log_4(5)$

   c) $\log_3(x+4) + \log_3(x-2) = 3$

   d) $\log(3x+1) - \log(x-3) = 3$

   e) $\log(x+2) - \log(4x+3) + \log(x) = 0$

   f) $\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(x)$

7. Resolver las siguientes ecuaciones

   a) $5^{4x} + 4\cdot 5^{2x} - 21 = 0$

   b) $\sqrt{\log(x)} = \log\left(\sqrt{x}\right)$

   c) $\log(x^{\log(x)}) = \log(7 - 2\log(x)) - \log(5)$

   d) $\dfrac{\log(2x)}{\log(4x-15)} = 2$

   e) $\dfrac{1}{5-\log(x)} + \dfrac{2}{1+\log(x)} = 1$

   f) $\log(x^3) - \dfrac{12}{\log(x)} = 5$

   g) $x^{\log(x)-1} = 100$

   h) $x^{1/\log(x)} = 5$

8. Determine, si existen, todos los valores de x para los cuales

$$\log(x+3) = \log(x) + \log(3)$$

9. Determine el valor de x en la siguiente ecuación

$$\log_2(\log_3(x)) = 4$$

Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.