Clase 1: Ecuaciones lineales, cuadráticas, racionales y con raíz

- Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas.
- Resolver ecuaciones racionales y con raíz transformando la ecuación en una lineal o cuadrática.

1. Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones que contienen una o más *variables* o *incógnitas*.

Ejemplo.

Ecuación	Expresiones	Variables
$7x+2=3$	$7x+2,\ 3$	x
$5x-1=3x+2$	$5x-1,\ 3x+2$	x
$x^2+2x-3=0$	$x^2+2x-3,\ 0$	x
$3x^2+1=5+x-x^2$	$3x^2+1,\ 5+x-x^2$	x
$\frac{x+1}{x-1}=1$	$\frac{x+1}{x-1},\ 1$	x
$\frac{2x+3}{x^2-1}=x^2+x+1$	$\frac{2x+3}{x^2-1},\ x^2+x+1$	x
$2x+y=x-y$	$2x+y,\ x-y$	$x,\ y$
$x^2+y^2=4$	$x^2+y^2,\ 4$	$x,\ y$
$\frac{x+y+z}{x-y}=x+y$	$\frac{x+y+z}{x-y},\ x-y$	$x,\ y,\ z$
$\sqrt{x+2}=x$	$\sqrt{x+2},\ x$	x

□

Al ser una ecuación la igualdad entre dos expresiones, esta igualdad puede o no ser cierta dependiendo de los valores numéricos que tomen las variables o incógnitas. Por ejemplo, la ecuación

$$3x+2=5$$

para $x=1$ se tiene $3\cdot 1+2=5$, que es una igualdad cierta, mientras que si $x=2$ se tiene $3\cdot 2+2=5$, que es una igualdad falsa.

Los números reales que hacen cierta una ecuación se llaman **raíces de la ecuación** o **soluciones de la ecuación**. El conjunto de todas las raíces de la ecuación se denomina **conjunto solución**.

Ejemplo.

1. La ecuación
$$x + 3 = 1$$
tiene por conjunto solución $S = \{-2\}$.
2. La ecuación
$$x^2 = 1$$
tiene por conjunto solución $S = \{-1, 1\}$.
3. La ecuación
$$\sqrt{x^2 + 1} = -1$$
tiene por conjunto solución $S = \emptyset$, *conjunto vacío*. Este es un caso de ecuación que no admite raíces reales.

$\square$

Diremos que dos ecuaciones son **equivalentes** si poseen el mismo conjunto solución.

Ejemplo.

1. Las ecuaciones
$$2x + 3 = 1 \qquad \text{y} \qquad x + 1 = 0$$
son equivalentes ya que ambas tienen conjunto solución $S = \{-1\}$.
2. Las ecuaciones
$$x^2 - 4 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 = 4$$
son equivalentes ya que ambas tienen conjunto solución $S = \{-2, 2\}$.
3. Las ecuaciones
$$\frac{1-x}{1+x} = 1 \qquad \text{y} \qquad 1 - x = 1 + x$$
son equivalentes ya que ambas tienen conjunto solución $S = \{0\}$.

$\square$

Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla. Las siguientes propiedades para el signo "igualdad" nos ayudarán a determinar estas ecuaciones equivalentes.

Propiedades de la Igualdad

1. $A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A + C = B + C$ (Propiedad Aditiva)
2. $A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot C = B \cdot C$, $C \neq 0$ (Propiedad Multiplicativa)

En las siguientes secciones veremos como las propiedades de la igualdad nos permiten determinar el conjunto solución de una ecuación.

1.1. Ecuaciones de Primer Grado

Una **ecuación lineal** de una variable es una ecuación que sólo involucra sumas y ponderados de una variable a la primera potencia. Este tipo de ecuación es equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

Ejemplo. Resolver la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

Solución. Para resolver este tipo de ecuaciones debemos *despejar* la incógnita x, usando las propiedades de la igualdad.

$$\begin{aligned}
7x - 4 &= 3x + 8 && \text{Sumar } 4\\
(7x - 4) + \boxed{4} &= (3x + 8) + \boxed{4} && \text{Simplificar}\\
7x &= 3x + 12 && \text{Sumar } -3x\\
7x + \boxed{-3x} &= (3x + 12) + \boxed{-3x} && \text{Simplificar}\\
4x &= 12 && \text{Multiplicar por } \frac{1}{4}\\
\boxed{\frac{1}{4}} \cdot 4x &= \boxed{\frac{1}{4}} \cdot 12 && \text{Simplificar}\\
x &= 3 && \text{Simplificar}
\end{aligned}$$

La última ecuación nos dice que x es igual a 3. Si ahora verificamos este resultado en la ecuación original tendremos

$$7 \cdot (3) - 4 = 17 \qquad \text{y} \qquad 3 \cdot (3) + 8 = 17$$

□

Ejercicio (alumno)**.** Resuelva la ecuación

$$2 - \left[-2(x+1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

1.2. Ecuaciones de Segundo Grado

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

En esta sección presentaremos tres métodos que nos permitirán determinar las raíces de una ecuación cuadrática: *factorización*, *raíz cuadrada* y *completación de cuadrados*.

Para el primer método debemos tener presente la siguiente propiedad de los números reales:

Propiedad del Producto Cero

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

Ejemplo.[Factorización]
Resolver la ecuación $x^2 + 5x - 24 = 0$.

Solucíon.

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 24 &= 0 && \text{Factorizar} \\ (x-3)(x+8) &= 0 && \text{Propiedad del Producto Cero} \\ x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 &= 0 && \text{Resolver} \\ x = 3 \quad \text{o} \quad x &= -8 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación tiene por soluciones $x = 3$ y $x = -8$. □

Ejercicio (alumno)**.** Resolver, mediante factorización, las siguientes ecuaciones

1. $4x^2 + 20x + 24 = 0$
2. $4x^2 + 8x + 3 = 0$

   Sugerencia. Multiplique ambos lados de la igualdad por $a = 4$, luego hacer el cambio de variable $u = 4x$ y resolver la ecuación resultante en la variable u.

Para el segundo método debemos tener presente el siguiente resultado:

Raíz cuadrada

La ecuación

$$x^2 = c, \quad c \geq 0$$

tiene por solución $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

Ejemplo.[Raíz Cuadrada]

1. La ecuación $x^2 = 3$ tiene por solución $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.
2. Para resolver la ecuación $(x-1)^2 = 3$ se considera como incógnita $x - 1$, vale decir

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 3 && \text{Teorema} \\ x - 1 = \sqrt{3} \quad &\text{o} \quad x - 1 = -\sqrt{3} && \text{Sumar 1} \\ x = 1 + \sqrt{3} \quad &\text{o} \quad x = 1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

   Luego, las soluciones a la ecuación son $x = 1 + \sqrt{3}$ y $x = 1 - \sqrt{3}$.
   Este ejemplo se puede también resolver de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 3 && \text{Tomar raíz cuadrada} \\ x - 1 &= \pm\sqrt{3} && \text{Sumar 1} \\ x &= 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\square$

Finalmente, el tercer método se basa en la siguiente identidad:

Completar Cuadrado

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ejemplo.[Completar Cuadrado]
Resolvamos la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. En este caso $b = -6$ luego

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 5 &= 0 && \text{Sumar 4 para completar cuadrado } \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9\\
x^2 - 6x + 9 &= 4 && \text{Factorizar el binomio}\\
(x-3)^2 &= 4 && \text{Tomar raíz cuadrada}\\
x - 3 &= \pm 2 && \text{Sumar 3}\\
x &= 3 \pm 2
\end{aligned}$$

Luego las soluciones a la ecuación son $x = 1$ y $x = 5$. $\square$

Ejercicio (alumno)**.** Resolver, mediante completación de cuadrado, la siguiente ecuación de segundo grado

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

Recordemos que una ecuación de segundo grado es de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Para resolver esta ecuación es necesario convertirla en una ecuación *equivalente*, en la cual se pueda completar cuadrado. Dado que $a \neq 0$ podemos multiplicar por su inverso multiplicativo, vale decir

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \text{Multiplicar por } \frac{1}{a}\\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && \text{Sumar } -\frac{c}{a}\\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \text{Completar cuadrado sumando } \left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && \text{Factorizar el cuadrado perfecto}\\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && \text{Tomar raíz cuadrada}\\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{Sumar } -\frac{b}{2a}\\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Teorema

La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, tiene soluciones

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo.

1. En la ecuación $5x^2 - 3x - 1 = 0$ los coeficientes son a, b y c son
$$a = 5, \quad b = -3 \quad \text{y} \quad c = -1,$$
luego las soluciones están dadas por
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (5) \cdot (-1)}}{2 \cdot (5)} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$$
Por lo tanto, esta ecuación tiene dos soluciones $x = \dfrac{3 - \sqrt{29}}{10}$ y $x = \dfrac{3 + \sqrt{29}}{10}$.

2. En la ecuación $4x^2 + 12x + 9 = 0$ los coeficientes son a, b y c son
$$a = 4, \quad b = 12 \quad \text{y} \quad c = 9,$$
luego las soluciones están dadas por
$$x = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (9)}}{2 \cdot (4)} = \frac{-12 \pm 0}{8} = \frac{-3}{2}$$
Por lo tanto, esta ecuación tiene por única solución $x = -\dfrac{3}{2}$.

3. En la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ los coeficientes son a, b y c son
$$a = 1, \quad b = 2 \quad \text{y} \quad c = 2,$$
luego las soluciones estn dadas por
$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot (1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm \sqrt{-1}$$
Pero $\sqrt{-1}$ no es un número real, por lo tanto la ecuación no tiene solución real.

□

Dada la ecuación de segundo grado
$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$
se define su **discriminante** por
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

TEOREMA

Sea $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ecuación de segundo grado.

1. Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $\Delta = 0$ entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación no tiene solución real.

Ejemplo. Decida, a partir del discriminante, si las siguientes ecuaciones tienen soluciones reales. En caso de tenerlas, determínelas.

1. $x^2 + 4x - 1 = 0$
2. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
3. $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

Solución. Calculamos el discriminante para cada ecuación,

1. $x^2 + 4x - 1 = 0$
$$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{2 soluciones reales diferentes.}$$
2. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{1 solución real.}$$
3. $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (4) = -\frac{4}{3} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{no tiene raíces.}$$

□

Ejercicio (alumno)**.** Use el discriminante para determinar los valores de a para que la ecuación
$$4x^2 + 2ax + 1 = 0$$
tenga una solución real, dos soluciones reales, no tenga solución real.

1.3. Ecuaciones con expresiones racionales

1. Resolver la ecuación $\frac{5}{2x-1} + \frac{2}{7} = 1$.
$$\begin{aligned}
\frac{5}{2x-1} + \frac{2}{7} &= 1 && \text{m.c.m. } 7(2x-1)\\
\frac{5}{2x-1} + \frac{2}{7} &= 1 && \text{Multiplicar } 7(2x-1)\\
35 + 2(2x-1) &= 7(2x-1) && \text{Desarrollar paréntesis y simplificar}\\
4x + 33 &= 14x - 7 && \text{Sumar } 7\\
4x + 40 &= 14x && \text{Sumar } -4x\\
40 &= 10x && \text{Multiplicar por } \frac{1}{10}\\
4 &= x
\end{aligned}$$
La última ecuación nos dice que x es igual a 4. Si ahora verificamos este resultado en la ecuación original tendremos
$$\frac{5}{2 \cdot (4) - 1} + \frac{2}{7} = 1$$
Nota: En los siguientes ejercicios no verificaremos los resultados, ya que sabemos que las propiedades de la igualdad generan ecuaciones equivalentes.

2. Resuelver la ecuación $\frac{3}{x-1} = \frac{8x}{2x-1}$.
$$\begin{aligned}
\frac{3}{x-1} &= \frac{8x}{2x-1} && \text{Multiplicar por m.c.m. } (x-1)(2x-1)\\
3(2x-1) &= 8x(x-1) && \text{Agrupar a un mismo lado de la igualdad}\\
8x^2 - 14x + 3 &= 0 && \text{Resolver la cuadrática}\\
x &= \frac{3}{2}, \frac{1}{4}
\end{aligned}$$
Por lo tanto, la ecuación racional tiene por soluciones $x = \frac{1}{4}$ y $x = \frac{3}{2}$.

Ejercicio (estudiante)**.** Resolver las siguientes ecuaciones,

1. $\dfrac{3x}{x-1} + \dfrac{6}{x^2+2x-3} = 10 - \dfrac{7x}{x+3}$

2. $\dfrac{ax-b}{x+a} - \dfrac{ax+b}{x-a} = \dfrac{a^3+2ab}{x^2-a^2}$, siendo a y b constantes.

1.4. Ecuaciones con exponente racional

Ejemplo.[Despejando] Resolver la ecuación

$$5\sqrt{2} + 2\sqrt{3x} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2x}$$

Solución. La incógnita x está a la potencia $1/2$, luego la ecuación es válida para $x \geq 0$. Ocupando las leyes de los exponentes tendremos

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3x} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2x} && \text{Ley 1 de los exponentes} \\ 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\sqrt{x} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\sqrt{x} && \text{Despejar } \sqrt{x} \\ (2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})\sqrt{x} &= (2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) && \text{Simplificar} \\ \sqrt{x} &= 1 \end{aligned}$$

Puesto que $x \geq 0$, la ecuación $\sqrt{x} = 1$ tiene por única solución $x = 1$. □

Ejemplo.[Elevando al cuadrado] Resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+2}$$

Solución. Esta ecuación tiene las siguientes restricciones para x,

$$x + 1 > 0 \quad \text{y} \quad x + 2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > -1$$

Bajo la restricción $x > -1$ las raíces en la ecuación están bien definidas y podremos multiplicar por $\sqrt{x+1}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x+1}} &= \sqrt{x+2} && \text{Multiplicar por m.c.m } \sqrt{x+1} \\ x &= \sqrt{x+2}\sqrt{x+1} && \text{Ley 1 de los exponentes} \\ x &= \sqrt{(x+2)(x+1)} && \text{Elevar al cuadrado} \\ x^2 &= (x+2)(x+1) && \text{Expander} \\ x^2 &= x^2 + 3x + 2 && \text{Resuelver} \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Puesto que $x = -\dfrac{2}{3}$ no satisface la condición $x > -1$, entonces la ecuación no tiene solución. □

Ejercicio (Desafío para el estudiante)**.** Resolver la ecuación

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{x+3}$$

Importante. Verifique que las raíces encontradas satisfacen la ecuación. Si alguna de ellas no la satisface, justifique por qué a partir del desarrollo que lo llevó a esa solución.

Nota. Para elevar al cuadrado una ecuación es necesario que ambos lados de la igualdad sean positivos. Por ejemplo, la ecuación

$$\sqrt{x} = -x \qquad \text{no es equivalente a} \qquad x = x^2$$

La primera ecuación tiene solución $x = 0$ mientras que la segunda tiene solución $x = 0, 1$. Esto se debe a que la ecuación $\sqrt{x} = -x$ es válida para $x \geq 0$, pero no existe ningún número real positivo que tenga por raíz un número negativo. Con este último análisis es suficiente para concluir que la ecuación $\sqrt{x} = -x$ no tiene solución en los reales, sin necesidad de "resolverla" y comprobar si las soluciones obtenidas son o no válidas.

Ejemplo. Sea a un número real fijo. Resolver la ecuación

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2x}$$

Solución. La ecuación está bien definida bajo las siguientes restricciones de la variable x,

$$a + x \geq 0 \quad \text{y} \quad a - x \geq 0 \quad \text{y} \quad x \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq x \leq a$$

De este modo, la ecuación podría tener solución en los reales únicamente si $a \geq 0$. Resolvamos ahora la ecuación,

$$\begin{aligned} \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} &= \sqrt{2x} && \text{Elevar al cuadrado} \\ (a+x) + 2\sqrt{a^2 - x^2} + (a-x) &= 2x \\ \sqrt{a^2 - x^2} &= x - a && \text{Elevar al cuadrado: } x - a \geq 0 \\ a^2 - x^2 &= x^2 - 2ax + a^2 && \text{Resolver} \\ x(x-a) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación tiene por solución $x = 0$ y $x = a$. Pero $x = 0$ no satisface las condiciones $0 \leq x \leq a$ y $x - a \geq 0$ (por tanto tampoco satisface la ecuación original). La única solución a la ecuación es $x = a$ (la única que satisface todas las condiciones). $\square$

Ejercicio (alumno)**.** Resolver la ecuación $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-3} - \sqrt{2x}$.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\sqrt{x} = |x|$$

Solución. Alternativa 1. La ecuación está bien definida para $x \geq 0$, luego $|x| = x$ y la ecuación original es equivalente a:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x && \text{Elevar al cuadrado} \\ x &= x^2 && \text{Resolver} \\ (x-1)x &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación tiene por solución $x = 0$ y $x = 1$.

Alternativa 2. La ecuación está bien definida para $x \geq 0$, luego $|x| = x$ y la ecuación original es equivalente a:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x && \text{Cambio de variable: } u = \sqrt{x} \\ u &= u^2 && \text{Resolver} \\ (u-1)u &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación tiene por solución $u = 0$ y $u = 1$, de donde se desprende que

$$\sqrt{x} = 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{x} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

$\square$

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando las propiedades de la igualdad

   a) $5x+1-[1+2(x-1)]=3[1-(2x-3)]$

   b) $5x(8-x)-3x(5-3x)=-26-2x(7-2x)$

   c) $(x+3)^2-(x-1)^2=7x$

   d) $(x+2)(2x+1)=(x+6)(2x+3)$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones

   a) $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{4}{2x+2}=\dfrac{4}{2x-2}$

   b) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x+1}$

   c) $\dfrac{x}{x^2-6x+9}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-2x-3}$

3. Determine todos los valores de k en los reales de modo que la ecuación
$$(k^2+2)x^2-7x-2k=1$$
tenga a $x=-\dfrac{1}{2}$ entre sus soluciones.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones, sabiendo que x es la incógnita

   a) $\dfrac{x}{2a}-\dfrac{1-x}{a^2}=\dfrac{1}{2a}$

   b) $\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{2a-3}{x^2-ax}$

   c) $\dfrac{x-a}{x+b}=\dfrac{x+b}{x+a}$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones usando el método de completación de cuadrado.

   a) $x^2+2x-5=0$

   b) $x^4-13x^2+40=0$

   c) $3x^2+7x+4=0$

6. Determine las soluciones reales de las siguientes ecuaciones

   a) $\sqrt{2x+1}+1=x$

   b) $x-5\sqrt{x}+6=0$

   c) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=3\dfrac{\sqrt{x}+1}{2}$

7. Determine los valores de x que satisfacen la ecuación
$$\frac{3(a-x)}{b}-\frac{2(b-x)}{a}=\frac{2b^2-6a^2}{ab}, \qquad a\neq 0,\ b\neq 0$$

8. Demuestre que para todo p y q en los reales, la ecuación
$$x^2+2(p+q)x+2pq=0$$
tiene raíces reales. Determine dichas raíces.

9. Sea p un número real. Determine todos los números reales que satisfacen la ecuación
$$px^2-(p^2+1)x+p=0$$

10. Determine los valores de a para que la ecuación
$$2x^2+x+a=0$$
tenga una solución real, dos soluciones reales, no tenga solución real.

11. Determine los valores de a para que la ecuación
$$ax^2+2ax+4=0$$
tenga una solución real, dos soluciones reales, no tenga solución real.

Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.