Clase 2: Expresiones algebraicas

- Operar expresiones algebraicas usando las propiedades algebraicas de las operaciones suma y producto, propiedades de las potencias, reglas de signos y paréntesis.
- Evaluar expresiones algebraicas mediante remplazo de cada variable por un valor dado.
- Calcular mínimo común múltiplo (m.c.m.) entre expresiones algebraicas.
- Determinar una forma factorizada para expresiones algebraicas.
- Usar las fórmulas de factorización para expandir expresiones algebraicas.
- Operar fracciones algebraicas usando las propiedades algebraicas de las operaciones suma y producto, propiedades de las potencias, reglas de signos y paréntesis.
- Determinar una forma simplificada para fracciones algebraicas, mediante factorización y simplificación de factores comunes.

1. Expresiones algebraicas

1.- Un **término algebraico** es un producto entre *coeficientes numéricos* y *constantes literales*.

Término Algebraico	Coeficientes Numéricos	Constantes Literales
$3 \cdot a$	3	a
$\sqrt{2} \cdot a^2 \cdot b^5$	$\sqrt{2}$	a, b

2.- Una **expresión algebraica** es una combinación de término algebraicos mediante las operaciones suma y resta.

Expresión Algebraica	Términos Algebraicos
$2a - 3b$	$2a$, $3b$
$5 + 2b - 3c$	5, $2b$, $3c$
$2 - \dfrac{a}{b}$	2, ab^{-1}

3.- Diremos que dos o más términos algebraicos son **términos semejantes** si tienen igual factor literal.

Términos Semejantes	Factor Literal
$-3ab$	ab
$\dfrac{5}{2}ab$	ab
$\sqrt{7}ab$	ab

1.1. Reducción de Términos Semejantes

Cuando una expresión algebraica posee términos semejantes, estos pueden ser reducidos a un término algebraico sumando sus cantidades numéricas, como muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo. En la siguiente expresión algebraica existen dos pares de términos semejantes

$$\begin{aligned}
5a^2b^3 - 4ac + 3a^2b^3 + 3ac &= (5a^2b^3 + 3a^2b^3) + (3ac - 4ac) && \text{(Asociar)}\\
&= (5+3)a^2b^3 + (3-4)ac && \text{(Factorizar)}\\
&= 8a^2b^3 + (-1)ac && \text{(Sumar o Restar)}\\
&= 8a^2b^3 - ac
\end{aligned}$$

Este proceso permite reducir expresiones algebraicas que poseen términos semejantes. El algoritmo para realizar esta reducción es siempre igual: *asociar, factorizar y sumar/restar.* □

1.2. Uso de Paréntesis

Si una expresión algebraica está dividida por el uso de paréntesis, estos pueden ser eliminados mediante la propiedad distributiva. El siguiente teorema presenta los casos más comunes.

Teorema

1. $+(a+b) = a+b$
2. $+(a-b) = a-b$
3. $+(-a-b) = -a-b$
4. $-(a+b) = -a-b$
5. $-(a-b) = -a+b$
6. $-(-a-b) = a+b$

En relación al teorema anterior, para eliminar paréntesis debes fijarte en el signo que tengan:

- Si es **positivo**, se elimina **manteniendo todos los signos** que están dentro de él.
- Si es **negativo**, se elimina **cambiando todos los signos** que están dentro de él.

Ejemplo. En este ejemplo reduciremos una expresión simplificando paréntesis y términos semejantes,

$$\begin{aligned}
2a - \{2ab - [3ab - (2a - 3ab)]\} &= 2a - 2ab + [3ab - (2a - 3ab)]\\
&= 2a - 2ab + 3ab - (2a - 3ab)\\
&= 2a - 2ab + 3ab - 2a + 3ab\\
&= 4ab
\end{aligned}$$

En este ejemplo hemos introducido el uso de los paréntesis redondos ( ), cuadrados [ ] y de llaves { }. □

1.3. Evaluación de Expresiones Algebraicas

Valorar una expresión algebraica significa **asignar un valor numérico** a cada variable de los términos y resolver las operaciones indicadas en la expresión para determinar su valor final. Para ello es necesario tener presente el siguiente esquema

I) Reemplazar cada variable por el valor asignado.

II) Calcular las potencias indicadas

III) Efectuar las multiplicaciones y divisiones

IV) Realizar las adiciones y sustracciones

Ejemplo. Consideremos la expresión algebraica $5x^2y - 8xy^2 - 9y^3$ y asignamos los valores $x = 2$ e $y = -1$

$$\begin{aligned}
5x^2y - 8xy^2 - 9y^3 &= 5\cdot(2)^2\cdot(-1) - 8\cdot(2)\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1)^3 && \text{(Paso I)}\\
&= 5\cdot 4\cdot(-1) - 8\cdot(2)\cdot 1 - 9\cdot(-1) && \text{(Paso II)}\\
&= -20 - 16 + 9 && \text{(Paso III)}\\
&= -27 && \text{(Paso IV)}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio (alumno)**.** Si $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = \dfrac{2}{3}$, calcular el valor de la expresión $5x^2y - 8xy^2 - 9y^3$

2. Factorización

Factorización es el proceso que permite reescribir una *expresión algebraica* como el producto de dos o más factores.

Ejemplo. En este ejemplo la factorización depende de la existencia de un *factor común* en cada uno de los términos que se están sumando:

1. **Factor Común: Numérico.**
$$80a - 40b + 160c + 120d = \underbrace{40}_{\text{factor}} \cdot \underbrace{(2a - b + 4c + 3d)}_{\text{factor}}$$
siendo el número 40 el factor común.

2. **Factor Común: Término Algebraico.**
$$a^2bc + ab^2c + abc^2 = \underbrace{abc}_{\text{factor}} \cdot \underbrace{(a + b + c)}_{\text{factor}}$$
siendo el término algebraico abc el factor común.

3. **Factor Común: Expresión Algebraica.**
$$x(a + b) + y(a + b) + z(a + b) = \underbrace{(a + b)}_{\text{factor}} \cdot \underbrace{(x + y + z)}_{\text{factor}}$$
siendo la expresión algebraica $a + b$ el factor común.

□

Ejercicio (alumno)**.** Factorice el término común en la siguiente expresión algebraica $x(b + 2) - b - 2 + 3(b + 2)$.

TIPOS DE FACTORIZACIÓN

1.- Diferencia de Cuadrados.
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
también conocida como *suma por la diferencia*.

Ejemplo.
- $5^2 - 3^2 = (5 + 3)(5 - 3)$
- $9x^2 - 4y^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$

2.- Suma de Cubos.
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo.
- $4^3 + 2^3 = (4 + 2)(4^2 - 4 \cdot 2 + 2^2)$
- $8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

3.- Diferencia de Cubos.
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo.
- $7^3 - 5^3 = (7 - 5)(7^2 + 7 \cdot 5 + 5^2)$
- $125x^3 - 27y^3 = (5x - 3y)(25x^2 + 15xy + 9y^2)$

4.- Cuadrados Perfectos.
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Ejemplo.
- $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$
- $9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$

3. Productos Notables

Cada uno de los siguientes resultados sigue de usar la *propiedad distributiva*, vale decir

$$(a+b)(c+d) = (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d = ac + bc + ad + bd$$

Tipos de productos notables

1. **Cuadrado del Binomio**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. **Cubo del Binomio**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

3. **Suma por la Diferencia**

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

4. **Binomio con Término Común**

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Ejemplo.[Cuadrado del Binomio]

- $$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$
- $$(3y-5)^2 = (3y)^2 - 2\cdot(3y)\cdot 5 + 5^2 = 9y^2 - 30y + 25$$

$\square$

Ejemplo.[Cubo del Binomio]

- $$(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$
- $$(y-5)^3 = y^3 - 3\cdot y^2\cdot 5 + 3\cdot y\cdot 5^2 - 5^3 = y^3 - 15y^2 + 75y - 125$$

$\square$

Ejemplo.[Suma por la Diferencia]

- $$(5+3)(5-3) = 5^2 - 3^2$$
- $$(3x+2y)(3x-2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$$

$\square$

Ejemplo.[Binomio con Término Común]

- $$(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2\cdot 3 = x^2 + 5x + 6$$
- $$(x+2)(x-3) = (x+2)(x+(-3)) = x^2 + (2+(-3))x + 2\cdot(-3) = x^2 - x - 6$$

- $$(x-2)(x-3) = (x+(-2))(x+(-3)) = x^2 + ((-2)+(-3))x + (-2)\cdot(-3) = x^2 - 5x + 6$$

$\square$

Ejercicio (alumno)**.**

1. Expandir el binomio $\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)^2$.
2. Factorizar el siguiente binomio $x^6 + 5x^3 + 6$.

4. Fracción Algebraica

Una **fracción algebraica** es una *expresión racional* cuyo numerador y denominador son expresiones algebraicas.

Ejemplo.

numerador

$$\frac{a+ab+bc}{a^2+b^2}$$

denominador

$\square$

Al igual que en los números naturales, es posible definir el m.c.d. (mínimo común denominador para el caso de expresiones algebraicas) y el m.c.m. de expresiones algebraicas. Para ello debemos introducir el *grado* de una expresión algebraica.

El **grado** de un término algebraico es la suma de los exponentes de las constantes literales.

Ejemplo. El término algebraico a^2b^3 tiene grado $2+3=5$. $\square$

El **grado** de una expresión algebraica es el máximo de los grados de los términos algebraicos que componen la expresión algebraica.

Ejemplo. La expresión algebraica $a^5b^2c + ab + ac^4$ está compuesta por tres factores literales. Los grados de dichos factores son

$$5+2+1=8, \qquad 1+1=2, \qquad 1+4=5$$

Luego, el máximo de ellos, 8 corresponde al grado de la expresión algebraica. $\square$

Dadas A, B expresiones algebraicas se define el **mínimo común múltiplo** entre A y B, que denotaremos $\text{m.c.m}(A,B)$, como la expresión algebraica de menor grado K que es múltiplo tanto de A como de B.

Es importante tener presente que $\text{m.c.m}(A,B)$ es la *menor* expresión algebraica que es *divisible* tanto por A como por B. En particular, A y B son factores de $\text{m.c.m}(A,B)$.

Ejemplo.

- Si $A = ab$ y $n = ac$ entonces
$$A = \boxed{a} \cdot \boxed{b} \qquad \text{y} \qquad A = a \cdot \boxed{c}$$
Luego m.c.m$(A, B) = a \cdot b \cdot c = abc$.
- Si $A = a^2b$ y $n = ab^2$ entonces
$$A = \boxed{a} \cdot \boxed{a} \cdot \boxed{b} \qquad \text{y} \qquad B = a \cdot b \cdot \boxed{b}$$
Luego m.c.m$(A, B) = a \cdot a \cdot b \cdot b = (ab)^2$.
- Si $A = a$ y $B = ab$ entonces
$$A = \boxed{a} \qquad \text{y} \qquad B = a \cdot \boxed{b}$$
Luego m.c.m$(A, B) = a \cdot b = ab$.
- Si $A = a - b$ y $B = a + b$ entonces
$$A = \boxed{a - b} \qquad \text{y} \qquad B = \boxed{a + b}$$
Luego m.c.m$(A, B) = (a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$.
- Si $A = a^2 + 2ab + b^2$ y $B = a^2 - b^2$ entonces
$$A = \boxed{(a + b)} \cdot \boxed{(a + b)}$$
$$B = (a + b) \cdot \boxed{(a - b)}$$
Luego m.c.m$(A, B) = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a - b) = a^3 - b^3 + a^2b - ab^2$.

□

Ejercicio (alumno)**.** Determine el m.c.m. entre $x^2 - y^2$ y $x^2 + xy$.

Propiedades de las Fracciones

Propiedad	**Ejemplo**
1. $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D} = \dfrac{A \cdot C}{B \cdot D}$	$\dfrac{2a - b}{b^2 + 1} \cdot \dfrac{a^2}{b - a} = \dfrac{(2a - b)a^2}{(b^2 + 1)(b - a)} = \dfrac{2a^3 - a^2b}{b^3 - ab^2 + b - a}$
2. $\dfrac{A}{B} : \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{D}{C}$	$\dfrac{a - b}{b^2} : \dfrac{a^2}{a + b} = \dfrac{a - b}{b^2} \cdot \dfrac{a + b}{a^2} = \dfrac{(a - b)(a + b)}{b^2a^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2b^2}$
3. $\dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C} = \dfrac{A + B}{C}$	$\dfrac{a^2 - b}{b + 1} + \dfrac{a + b}{b + 1} = \dfrac{(a^2 - b) + (a + b)}{b + 1} = \dfrac{a^2 + a}{b + 1}$
4. $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D}$	$\dfrac{b}{a + 1} + \dfrac{a}{a - 1} = \dfrac{b(a - 1) + a(a + 1)}{(a + 1)(a - 1)} = \dfrac{a^2 + ab + a - b}{a^2 - 1}$
5. $\dfrac{A \cdot C}{B \cdot C} = \dfrac{A}{B}$	$\dfrac{a^2 - ab}{a^2 - b^2} = \dfrac{a\cancel{(a - b)}}{(a + b)\cancel{(a - b)}} = \dfrac{a}{a + b}$

Ejemplo. Simplifique la siguiente expresión indicando los valores de x para los cuales está bien definida.
$$\frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$

Solución. Comenzaremos factorizando el numerador y denominador
$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 - 4x^2 + 4x} &= \frac{x(x + 5)(x - 2)}{x(x - 2)^2} \\ &= \frac{\cancel{x}(x + 5)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x}(x - 2)^{\cancel{2}}} \\ &= \frac{x + 5}{x - 2} \end{aligned}$$

Restricción: $x \neq 0, \quad x \neq 2$

$\square$

Ejemplo. Simplifique la siguiente expresión indicando los valores de a y b para los cuales está bien definida.

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$$

Solución. Sumaremos las fracciones tanto en el numerados como numerador,

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}} &= \frac{\dfrac{b+a}{\cancel{ab}}}{\dfrac{b-a}{\cancel{ab}}} \\ &= \frac{b+a}{b-a}\end{aligned}$$

Restricción: $a \neq 0, \quad b \neq 0, \; a \neq b$

$\square$

Ejercicio (alumno)**.** Opere y simplifique las siguientes expresiones indicando sus restricciones.

1. $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{6x}{x^2-1}$

2. $\dfrac{\dfrac{3}{a-2}-\dfrac{2}{a-3}}{\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a-2}}$

Ejercicios

1. Si $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = \dfrac{1}{3}$ calcule el valor de las siguientes expresiones

   a) $\dfrac{1 + \dfrac{1}{a}}{1 - \dfrac{1}{a}}$

   b) $\dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}}{2 \cdot \dfrac{a+b}{a \cdot b}}$

2. Usando la *propiedad distributiva*, expandir las siguientes expresiones

   a) $(ab+5)(ab-6)$

   b) $(a^{x+1}-6)(a^{x+1}-5)$

3. Expandir los siguientes cuadrados de binomio

   a) $(a^2-b^2)^2$

   b) $\left(3x - \dfrac{3}{x}\right)^2$

   c) $\left(\dfrac{2}{3y} - \dfrac{2}{y}\right)^2$

4. Factorizar a la forma $(x+a)(x+b)$ las siguientes expresiones

   a) $x^{10} - 17x^5 + 70$

   b) $x^{40} - 9x^{20} + 18$

5. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas

   a) $\dfrac{20(x^3-y^3)}{5x^2+5xy+5y^2}$

   b) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$

   c) $\dfrac{a^2-9}{a^2+6a+9}$

   d) $\dfrac{(ab-3b^3)^2}{a^3b^2-27b^5}$

6. Opere y simplifique las siguientes expresiones

   a) $\dfrac{a-b}{a^2+ab} + \dfrac{a+b}{ab} - \dfrac{a}{ab+b^2}$

   b) $\left(1 - \dfrac{1}{a^2}\right) : \left(a - \dfrac{1}{a}\right)$

   c) $\left(a + 1 - \dfrac{6}{2a+1}\right) : \left(a - 3 + \dfrac{6}{2a+1}\right)$

   d) $\left(\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+y}{x-y}\right) : \left(1 - \dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}\right)$

7. Opere y simplifique las siguientes expresiones indicando las restricciones.

   a) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{2x+6}{x+1}}$

   b) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b} - \dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a}{b}}$

   c) $\dfrac{\dfrac{a+3}{a+4} - \dfrac{a+1}{a+2}}{\dfrac{a-1}{a+2} - \dfrac{a-3}{a+4}}$

   d) $\dfrac{a^2+1}{a} - \dfrac{2a^2-4a+2}{(a-1)^2}$

8. Determine todos los números reales a para los cuales

$$\frac{1}{a - \dfrac{a}{a - \dfrac{a^2}{a+1}}} = -1$$

Referencia bibliográfica

- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.