# Clase 1: Sistemas numéricos de números reales

- Distinguir diferentes sistemas numéricos de números reales, sus operaciones, estructura algebraica y propiedades de orden.
- Calcular expresiones de números reales usando las propiedades algebraicas de las operaciones suma y producto, propiedades de las potencias, reglas de signos y paréntesis.
- Usar racionalización para simplificar expresiones racionales que involucran raíz.

## 1 Sistemas numéricos

Un **sistema numérico** $U$ es un conjunto con dos operaciones, *suma* y *producto*, que satisface las propiedades de *clausura*, *conmutatividad*, *asociatividad* y *distributividad*.

1. **Clausura**
   - Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b \in \mathbb{R}$
   - Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}$
2. **Conmutativa**
   - $a + b = b + a$
   - $a \cdot b = b \cdot a$
3. **Asociativa**
   - $a + (b + c) = (a + b) + c$
   - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. **Distributiva**
   - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Uno de los sistemas numéricos más importante en matemática es el conjunto de los números reales. Este conjunto está compuesto por los *números naturales* ($\mathbb{N}$), los *números enteros* ($\mathbb{Z}$), los *números racionales* ($\mathbb{Q}$) y los *números irracionales* ($\mathbb{I}$). Cada uno de estos conjuntos es, a su vez, un sistema numérico.

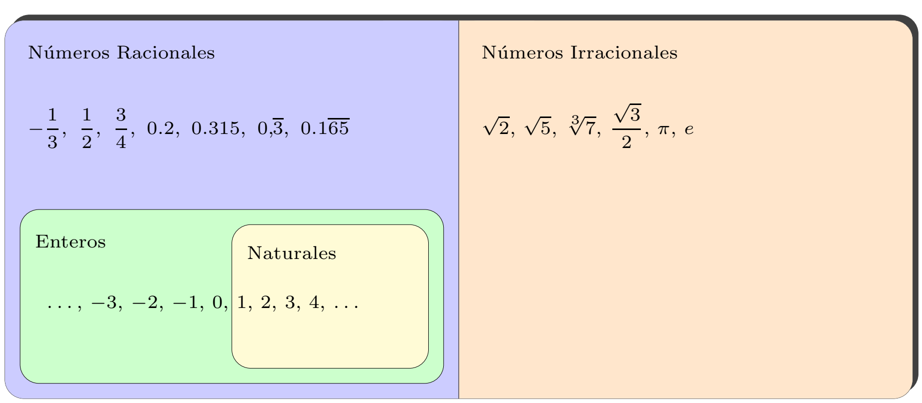


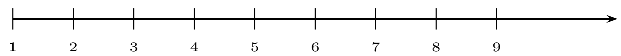

Figure 1: Números Reales

**Números Naturales ($\mathbb{N}$).** El conjunto de los **números naturales** nace por necesidad de *contar* y está constituido por infinitos elementos,

$$\mathbb{N} := \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5, \ldots\}.$$

Cada número natural representa la cantidad de elementos de un conjunto dado.

**Nota.** Una representación gráfica de los números naturales es en una recta, como muestra la figura:




cuyo orden está definido de *menor* a *mayor*, en relación a la cantidad de elementos que representa.

**Números Enteros ($\mathbb{Z}$).** El conjunto de los números enteros es la extensión de los números naturales al introducir los conceptos de *número negativo* e *inverso aditivo*,

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Los números naturales son denominados **números positivos** y sus inversos aditivos son denominados **números negativos**.

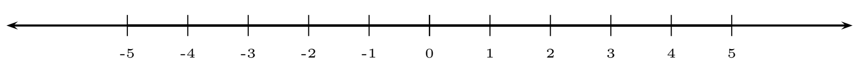
**Nota.**

1. La operación **resta** se define sobre $\mathbb{Z}$ (también sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$) como una operación *binaria* (que satisface la propiedad de clausura). Esta operación se define de la siguiente manera:

$$a - b = a + (-b)$$

   la suma entre $a$ y el inverso aditivo de $b$.

2. Este conjunto también admiten una representación gráfica sobre una recta,




   donde el inverso aditivo de un número natural se posiciona a igual distancia del cero que el número dado, pero hacia la izquierda. La distribución de los números enteros sobre la recta introduce un orden natural sobre este conjunto.

**Números Racionales ($\mathbb{Q}$).** El conjunto de los números racionales, o también conocido como conjunto de las *fracciones*, está definido por

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

bajo la condición

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{si y sólo si} \qquad a \cdot d = b \cdot d$$

Las operaciones suma y producto, que definen a $\mathbb{Q}$ como sistema numérico, son definidas por:

- **Suma.**
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

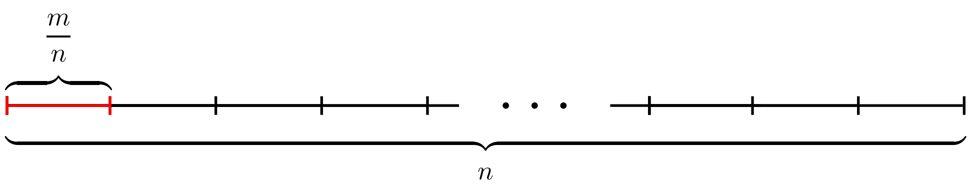
- **Producto.**
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

**Nota.**

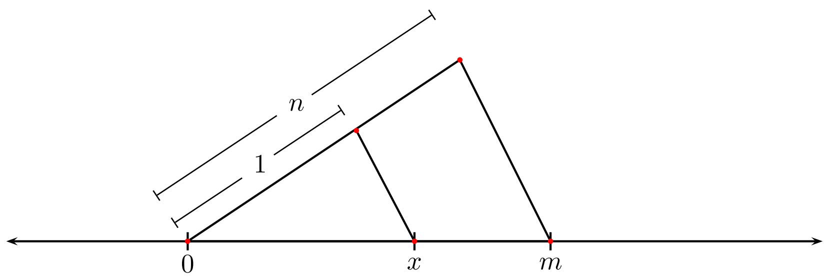
1. Si $m$ y $n$ son números naturales, entonces la fracción $\dfrac{m}{n}$ es un número que satisface

$$n \cdot \frac{m}{n} = m$$

En otras palabras, la fracción $\dfrac{m}{n}$ es aquel número (o medida) que al ser sumada $n$-veces entrega como resultado el número $m$.

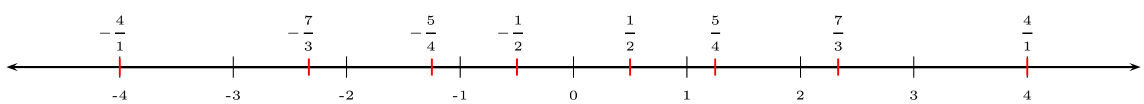



2. Para representar el número racional $\dfrac{m}{n}$ sobre la recta es común utilizar el teorema de Thales, sobre semejanza de triángulos:




$$\frac{x}{1} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m}{n}$$

3. Si $m$ y $n$ son números positivos, entonces la fracción $\dfrac{m}{n}$ es considerada un número positivo. De forma análoga, su inverso aditivo, $-\dfrac{m}{n}$ se considera un número negativo. Esto permite representar al conjunto de los números racionales sobre una recta, respetando el orden sobre los números enteros:




El conjunto de los números racionales satisface la **propiedad de densidad**: "entre dos números racionales existe un número racional". Esta propiedad deja la idea de que el conjunto de los números racionales está "muy junto". A pesar de ello se pueden encontrar números entre dos racionales que no son una fracción. Consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo**. Demostremos que el número $\sqrt{2}$ no es una fracción.

**Solución.** Esta demostración la realizaremos utilizando el **argumento por contradicción**:

"Si de una proposición se concluye una falsedad, entonces la proposición debía ser falsa".

La proposición que deseamos probar que es falsa es:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad (\sqrt{2} \quad \text{es una fracción})$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p$ y $q$ no tienen factores comunes. Elevando al cuadrado nuestra igualdad tendremos

$$p^2 = 2q^2$$

De la igualdad anterior se desprende que $p^2$ es un número par. Como $p$ es un número entero, entonces $p$ no puede ser impar (ya que producto de números impares es impar). Luego existe un número entero $k$ tal que $p = 2k$ y, al remplazar en la igualdad $p^2 = 2q^2$, se obtiene

$$4k^2 = 2q^2 \qquad \Longrightarrow \qquad q^2 = 2k^2$$

Por el argumento anteriormente utilizado se deduce que $q$ es un número par, lo que es falso dado que $p$ y $q$ no poseen factores comunes. Esta falsedad concluye que nuestra propisición $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ es falsa. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es un número racional. $\square$

**Números Irracionales ($\mathbb{I}$).** El conjunto de los números irracionales son todos aquellos números que no se pueden expresar como una fracción.

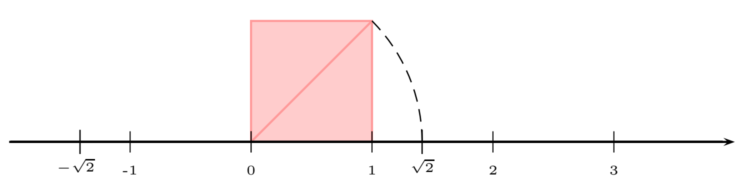
$$\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ \sqrt[3]{7},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \pi,\ e,\ \text{etc}\ldots$$

**Números Reales ($\mathbb{R}$).** El conjunto de los **números reales** consta de todos los números que pueden escribirse en forma decimal. En otras palabras, la unión de los números racionales e irracionales conforman el conjunto de los números reales. Las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. **Clausura**
   - Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b \in \mathbb{R}$
   - Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}$
2. **Conmutativa**
   - $a + b = b + a$
   - $a \cdot b = b \cdot a$
3. **Asociativa**
   - $a + (b + c) = (a + b) + c$
   - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. **Distributiva**
   - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
5. **Elemento neutro**
   - $a + 0 = 0 + a = a$
   - $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
6. **Inverso**
   - Para todo número real $a$ existe un número real, que denotaremos $-a$, que satisface
     $$a + (-a) = (-a) + a = 0$$
   - Para todo número real $a$ no cero existe un número real, que denotaremos $a^{-1}$ o $\frac{1}{a}$, que satisface
     $$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

El conjunto de los números reales es la extensión de los números racionales que respeta la suma, producto y orden de los racionales, además de completar sobre la recta los espacios que no cubren los números racionales.

**Nota.** El número $\sqrt{2}$ es un número real (no racional) cuya *medida* corresponde a la diagonal del cuadrado de lado 1.




En este sentido, un número real positivo se entiende como la *medida* de un segmento y se representa sobre la recta a la derecha del cero. Similarmente, número negativo se representa a la izquierda del cero, a igual distancia del cero que su inverso aditivo.

## 1.1 Álgebra de números reales

A continuación presentamos propiedades necesarias para el cálculo de expresiones de números reales.

**Propiedades de los signos**

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| **1.** $(-1)\cdot a = -a$ | $(-1)\cdot 7 = -7$ |
| **2.** $-(-a) = a$ | $-(-3) = 3$ |
| **3.** $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$ | $(-3)\cdot 4 = 3\cdot(-4) = -(3\cdot 4)$ |
| **4.** $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$ | $(-5)\cdot(-8) = 5\cdot 8$ |
| **5.** $-(a+b) = -a-b$ | $-(2+5) = -2-5$ |
| **6.** $-(a-b) = b-a$ | $-(4-9) = 9-4$ |

**Ejercicio** (alumno)**.** Calcular el valor de la siguientes expresión

$$12\cdot(-6) - 3\cdot(21 : 3 - 13 + (-4)\cdot(-5))$$

**Propiedades de las Fracciones**

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| **1.** $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ | $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7} = \frac{10}{21}$ |
| **2.** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ | $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ |
| **3.** $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ | $\frac{3}{7} + \frac{8}{7} = \frac{11}{7}$ |
| **4.** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}$ | $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2\cdot 5 + 3\cdot 4}{3\cdot 5} = \frac{22}{15}$ |
| **5.** $\frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \frac{a}{b}$ | $\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} = \frac{3}{5}$ |
| **6.** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $a\cdot d = b\cdot c$ | $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ si y sólo si $3\cdot 20 = 5\cdot 12$ |

**Nota.** La expresión $a : b$ y $\dfrac{a}{b}$ son equivalentes, de este modo

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

**Ejercicio** (alumno)**.** Calcular el valor de la siguientes expresión

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

**Ejemplo**. Pedro tenía \$18.000 y ha gastado las cuatro décimas partes en libros, dos quintos en películas y un décimo en revistas. ¿Qué fracción de su dinero ha gastado?, ¿cuánto dinero le queda?

**Solución.** El dinero se ha gastado de la siguiente manera:

- Libros:
$$\frac{4}{10}\cdot 18.000 = 7.200$$
- Películas:
$$\frac{2}{5}\cdot 18.000 = 7.200$$
- Revistas:
$$\frac{1}{10}\cdot 18.000 = 1.800$$

Sumando estos montos se tiene
$$\$7.200 + \$7.200 + \$1.800 = \$16.200,$$
de modo que el dinero que queda es $\$18.000 - \$16.200 = \$1.800$. Por lo tanto, la fracción que le queda es
$$\frac{1.800}{18.000} = \frac{1}{10}$$
es decir un décimo del dinero. □

**Ejercicio** (alumno)**.** Juan tiene \$112.500 para repartir entre sus tres hijos. Si al mayor le entrega dos quintos y al menor un tercio, ¿cuánto dinero recibió el hijo de en medio?, ¿qué fracción del dinero recibió el hijo de en medio?

## 1.2 Potencias y raíces

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define
$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-\text{factores}}$$
que denominaremos $n$**-ésima potencia de** $a$. El número $a$ se denomina **base** y $n$ se denomina **exponente**.
2. Si $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se define
$$a^0 = 0 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

**Leyes de Exponente**

| Ley | Ejemplo |
|---|---|
| **1.** $a^n a^m = a^{n+m}$ | $5^2 \cdot 5^7 = 5^{2+7} = 5^9$ |
| **2.** $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ | $\dfrac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$ |
| **3.** $(a^n)^m = a^{nm}$ | $\left(2^3\right)^5 = 2^{3\cdot 5} = 2^{15}$ |
| **4.** $(ab)^n = a^n b^n$ | $(2\cdot 5)^7 = 2^7 \cdot 5^7$ |
| **5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ | $\left(\dfrac{2}{5}\right)^7 = \dfrac{2^7}{5^7}$ |

**Ejercicio** (alumno)**.** Utilice las leyes de los exponentes para simplificar y calcular la siguiente expresión.

$$\frac{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4}{(2^2)^2}$$

**Ejercicio** (alumno)**.** Determine cuál es el error en cada una de las siguientes igualdades. Justifique su respuesta.

1. $-5^2 + 1 = 26$
2. $(3-\pi)^2 = 9 - \pi$
3. $4 \cdot 3^2 = 144$
4. $3^2 + 7^2 = 7^2$
5. $4^2 - 3^2 = 25$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$ se define la **raíz $n$-ésima** de $a$ por la relación

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{si y sólo si} \qquad b^n = a$$

Si $n$ es un número par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

**Ejemplo**.

- $\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $2^3 = 8$
- $\sqrt[4]{81} = 3$ ya que $3^4 = 81$
- $\sqrt{16} = 4$ ya que $4^2 = 16$
- $\sqrt[3]{125} = 5$ ya que $5^3 = 125$

□

**Ejemplo**. Calcular el valor de $\sqrt{16\cdot 49\cdot 64}$.

**Solución.** Comenzaremos escribiendo cada factor que está dentro de la raíz como potencia de números primos.

$$\begin{aligned}
\sqrt{16\cdot 49\cdot 64} &= \sqrt{2^4\cdot 7^2\cdot 2^6}\\
&= \sqrt{2^{10}\cdot 7^2}\\
&= \sqrt{\left(2^5\cdot 7\right)^2}\\
&= 2^5\cdot 7\\
&= 32\cdot 7 = 224
\end{aligned}$$

□

## Leyes de Exponente

| Ley | Ejemplo |
| --- | --- |
| **1.** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ | $\sqrt[3]{-8\cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = -2\cdot 3 = -6$ |
| **2.** $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$ |
| **3.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ | $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{62} = 2$ |
| **4.** $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $n$ es impar | $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5,\ \sqrt[5]{2^5} = 2$ |
| **5.** $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a\rvert$ si $n$ es par | $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ |

**Nota.** El **valor absoluto** de un número real $a$, que denotaremos $|a|$, representa la distancia de este número al cero, sobre la recta real. Por ejemplo,

1. $|2| = 2$
2. $|-3| = 3$

**Ejercicio** (alumno)**.** Calcular el valor de $\sqrt[3]{-64\cdot 27}$.

**Ejercicio** (alumno)**.** Decida si está bien utilizada la Ley 1 (de los exponentes) en la siguientes igualdad

$$\sqrt{(-16)\cdot(-36)} = \sqrt{-16}\sqrt{-36}$$

¿Se puede calcular $\sqrt{(-16)\cdot(-36)}$? Justifique sus respuestas.

## Racionalizar

| Racionalizar | Ejemplo |
| --- | --- |
| **1.** $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ |
| **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ | $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{7})}{3-7} = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ |
| **3.** $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ | $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{3-7} = -\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ |

**Ejercicio** (alumno)**.** Simplifique la expresión $\dfrac{3}{\sqrt{5}-6} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$, racionalizando el denominador cada vez que sea posible.

## Ejercicios

1. Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones.

   (a) $12 \cdot (-6) - 3 \cdot (21 : 3 - 13 + (-4) \cdot (-5))$
   (b) $32 - \{35 - [(-56) : 7 - 11 + 9 \cdot 5]\}$

2. Calcule las siguientes operaciones, **simplificando** cuando sea posible.

   (a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{12}$
   (b) $\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$
   (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$
   (d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)$

3. Calcule el valor de las siguientes expresiones, expresado su resultado como una fracción simplificada.

   (a) $6 \cdot \frac{3}{5} - \left[\left(2 \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{8}\right) \frac{28}{30}\right]$
   (b) $\frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right)$
   (c) $\dfrac{\frac{7}{4} + \frac{2}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{5}{8}}$

4. Calcular el valor de las siguientes expresiones.

   (a) $\left(\frac{2^{-1}}{5} + 4^3\right) \cdot 5^{-1} : (0.2)^{-4}$
   (b) $\frac{16^{n+4} \cdot 16^{1-n}}{4^7}$
   (c) $\left(\frac{5^n a^3}{b^3}\right)^2 : \left(\frac{25^{n+1} a}{b^2}\right)^3$
   (d) $\left(\frac{a^n}{b^n}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-n}}{b^{-n}}\right)^3$
   (e) $\frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$
   (f) $\frac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}} : \frac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$
   (g) $\frac{18^{n-1}}{3^{2n+1} \cdot 2^{n+3}}$
   (h) $\frac{4x^6 b^{-8}}{2a^{-10} b^{10}}$
   (i) $\left(\frac{ab^{-3}c^{-5}}{a^4 b^6 c^{-10}}\right)^{-5}$

5. Racionalizar las siguientes expresiones.

   (a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$
   (b) $\frac{7}{\sqrt{10} - \sqrt{3}}$
   (c) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$
   (d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$
   (e) $\frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

6. Simplifique las siguientes expresiones, racionalizando en caso que sea necesario.

   (a) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{8} - 1} + \frac{2}{\sqrt{8} + 1}}{\frac{\sqrt{8} - 2}{\sqrt{8}} + \frac{2\sqrt{8} + 6}{\sqrt{8} + 1}}$
   (b) $\dfrac{\frac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + 4} - \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 2}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 2} - \frac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2} + 4}}$

# Referencia bibliográfica


- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 5ed.
- Precálculo: Matemáticas para el cálculo, James Stewart 6ed.
- Diapositivas de nivelación, Instituto de Ciencias Básicas UDP, versión 2015.