Clase 8
Sistemas de ecuaciones lineales

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2014

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f, \end{aligned} \tag{1}$$

donde los coeficientes a, b, c, d, e, f son números reales.

Un par ordenado (x, y) que satisface ambas ecuaciones, se llama **solución** del sistema (1).

Es importante observar que **cada ecuación del sistema representa una recta en el plano** y por lo tanto, una solución del sistema es un punto del plano que pertenece a ambas rectas.

Las preguntas que surgen de forma natural son: ¿tiene este sistema solución? y, de ser así, ¿cuántas?. Antes de responder estas preguntas, se revisarán algunos ejemplos, en los cuales se usarán las siguientes dos propiedades de los números reales:

Propiedad 1 Si $a = b$ y $c = d$, entoces $a + c = b + d$.

Propiedad 2 Si $a = b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $ac = bc$.

La propiedad 1 establece que si se suman dos ecuaciones, se obtiene una tercera ecuación correcta.

La propiedad 2 establece que se si se mutiplican ambos lados de una ecuación por una constante, se obtiene una segunda ecuación válida. Se debe suponer que $c \neq 0$ ya que, aunque la ecuación $0 = 0$ es correcta, no es de utilidad.

Ejemplo 1: Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \quad (L_1) \\ x + y &= 1 \quad (L_2) \end{aligned}$$

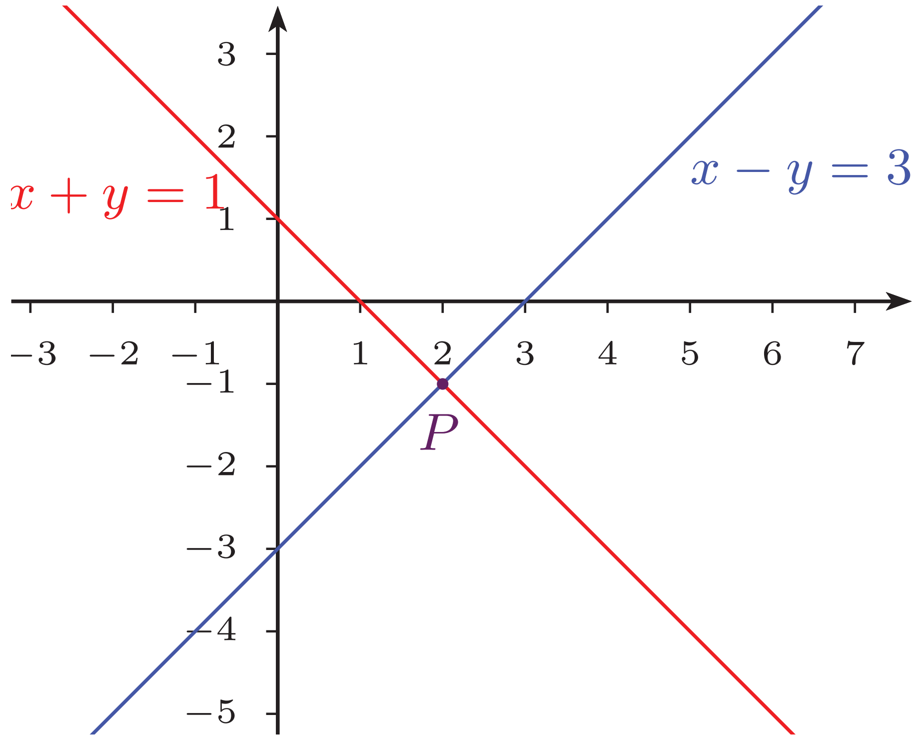
Solución: Sumando ambas ecuaciones para eliminar la incógnita y, se obtiene:

$$2x = 4,$$

multiplicando la ecuación por $\frac{1}{2}$, se tiene que $x = 2$ y reemplazando este valor en cualesquiera de las dos ecuaciones, obtenemos $y = -1$, luego la solución es el par ordenado $(2, -1)$.

Notamos que la ecuación L_1 es la recta $y = x - 3$, de pendiente 1 y coeficiente de posición -3.

La ecuación L_2 corresponde a la recta $y = -x + 1$, de pendiente -1 y coeficiente de posición 1.



La solución del sistema es el punto de intersección de ambas rectas, es decir el punto $P(2, -1)$

Sistema con infinitas soluciones

Ejemplo 2: Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= 6 \end{aligned} \tag{2}$$

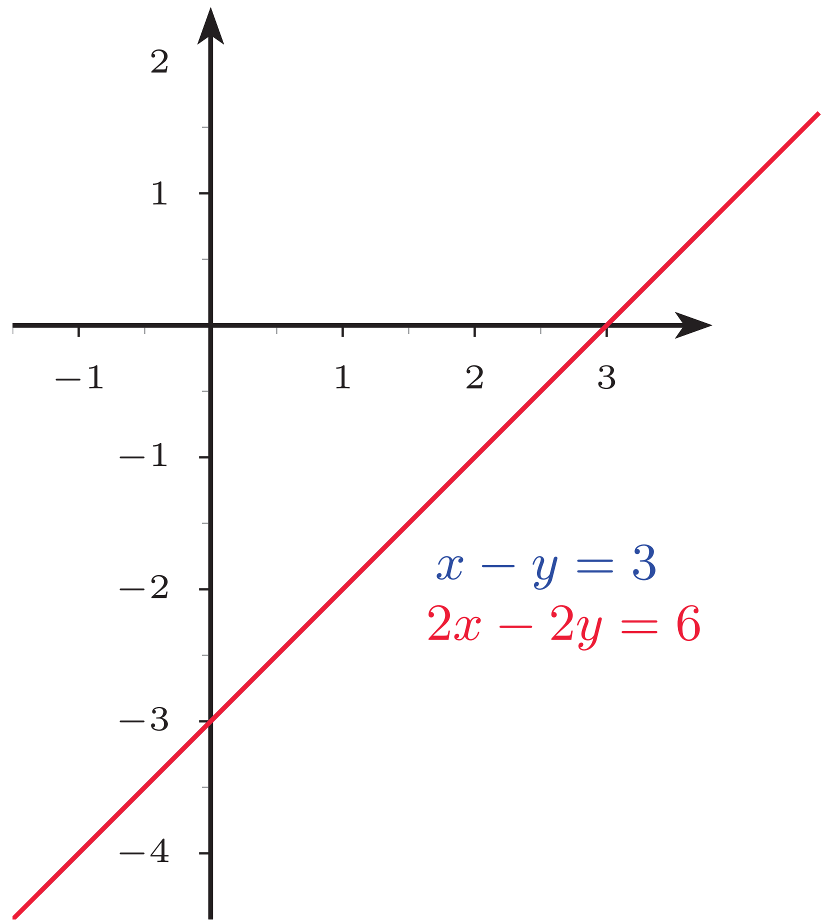
Solución: Multiplicando la primera ecuación por 2, se puede compobar que ambas ecuaciones son equivalentes.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, son **equivalentes** si un par ordenado de números (x, y), que satisface una de las ecuaciones, satisface también la otra, y viceversa.

Despejando y de una de las ecuaciones se obtiene $y = x - 3$, así el par $(x, x - 3)$ es una solución al sistema (2) para cualquier número real x. Es decir, el sistema (2) tiene infinitas soluciones.

Como se observa en el gráfico, las rectas son coincidentes y todos los puntos sobre la recta son solución del sistema, por ejemplo, los siguientes pares ordenados son solución: $(7,4),(0,-3),(1,-2),(8,5),(3,0)$, etc.



Sistema sin solución

Ejemplo 3: Considere el sistema de ecuaciones,

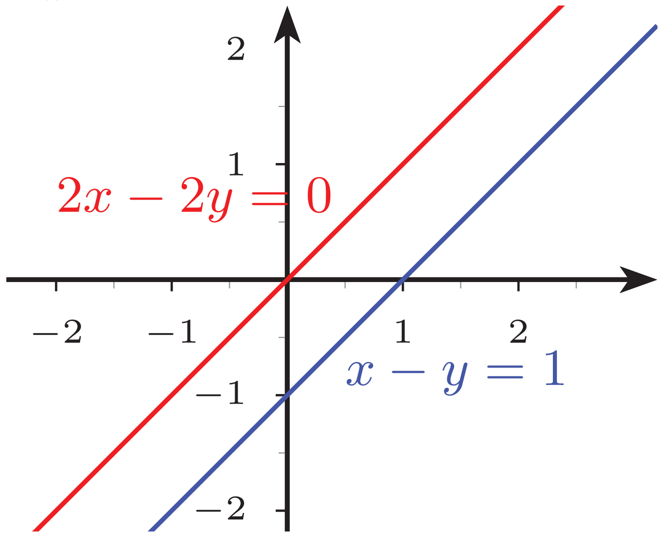
$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ x - y &= 1, \end{aligned}$$

Solución: despejando y en la segunda ecuación, se obtiene $y = x - 1$ y reemplazando en la primera ecuación, se observa que:

$$\begin{aligned} 2x - 2(x-1) &= 0 \\ 2 &= 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, esto indica que el sistema no tiene solución.

Gráficamente es posible observar que las rectas representadas por las ecuaciones que componen el sistema, son paralelas.



Existencia de soluciones

Geométricamente es fácil explicar lo que sucede en los ejemplos anteriores. Primero, ambas ecuaciones del sistema (1) son rectas en el plano. Una solución a (1) es un punto (x, y) que se encuentra sobre las dos rectas.

- Si las dos **rectas no son paralelas, entonces se cortan en un único punto**.
- Si las rectas son **paralelas**, entonces nunca se cortan (es decir, **no tienen puntos en común**)
- Si son **la misma recta** entonces tienen **infinitos puntos en común**.

En el ejemplo 1 las rectas tienen pendiente 1 y -1, respectivamente, por lo que no son paralelas y tienen un único punto en común, $(2, -1)$.

En el ejemplo 2, las rectas son paralelas (tienen pendiente 1) y coincidentes.

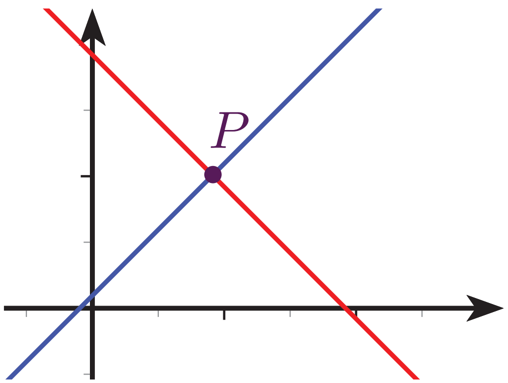
En el ejemplo 3, las rectas son paralelas y distintas.

Existencia de soluciones: Resumen

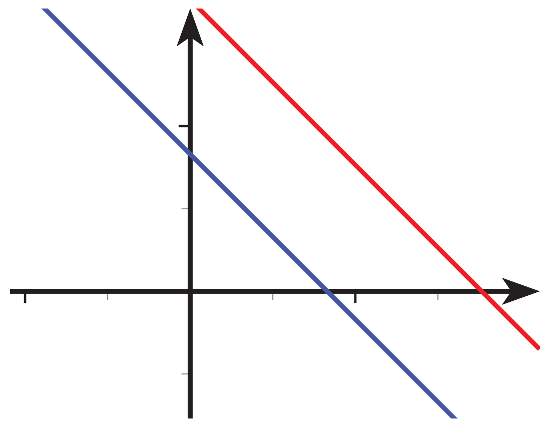
En síntesis, en un sistema de dos ecuaciones con dos incóginitas, se pueden distinguir tres casos:

1. El sistema tiene solución única.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene infinitas soluciones.

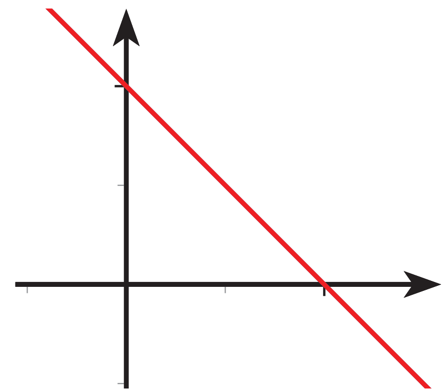
Gráficamente, estos tres casos corresponden respectivamente a las siguientes tres situaciones:



Solución única:
rectas se cortan en un punto



No existe solución:
rectas paralelas



Infinitas soluciones:
rectas coincidentes.

Problema 1 Sin resolver, decida si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen solución única, infinitas soluciones o no tienen solución.

1. $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 2x - 5y &= -1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 54x - 36y &= 9 \\ -54x + 36y &= 30 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 14x - 21y &= 7 \end{aligned}$$

Problema 2 Determine el o los valores de $a \in \mathbb{R}$, de modo que el sistema

$$\begin{aligned} ax + 3y &= 2 \\ 2x + (a-1)y &= a, \end{aligned}$$

1. tenga solución única,
2. tenga infinitas soluciones,
3. no tenga solución.

Represente gráficamente cada una de estas situaciones.

Problema 3: Se invierte un total de \$12.000 en dos fondos de inversión, uno de ellos paga un $6\,\%$ de interés anual simple y el otro un $8\,\%$ de interés anual simple. Si el interés de un año es de \$880, ¿qué cantidad de dinero se invirtió en cada fondo?

Recuerde que

$a\,\%$ significa a partes de un total de 100 partes iguales, y se lee "a por ciento". Esto se puede expresar como razón mediante la fracción $\dfrac{a}{100}$.

Un porcentaje también se puede expresar como un número decimal, para esto se debe transformar la expresión $\dfrac{a}{100}$ a su expresión decimal equivalente.