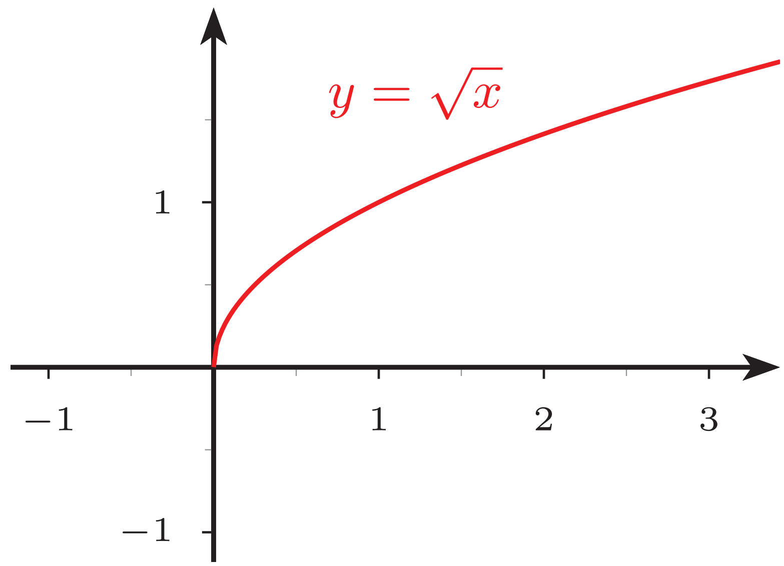
Clase 7
Ecuaciones irracionales

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2014

Gráfica de la función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$



Observando la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ es posible notar que:

- La función está definida solo para $x \geq 0$.
- $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$.
- f es una función creciente.

Problema 1: Resuelva, para $x \geq 0$, la ecuación

$$5\sqrt{2} + 2\sqrt{3x} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2x}$$

Solución: Utilizando propiedades da raíces, tenemos:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\sqrt{x} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\sqrt{x} \\ (2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})\sqrt{x} &= 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} \\ \sqrt{x} &= 1, \end{aligned}$$

luego $x = 1$.

Problema 2: Resuelva la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+2}$$

Solución: Asumiendo que $x > -1$, multiplicamos la igualdad por $\sqrt{x+1}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+1)(x+2)} &= x \\ x^2 + 3x + 2 &= x^2 \\ 3x + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $x = -\dfrac{2}{3}$, pero este resultado no satisface la ecuación original, luego, el problema no tiene solución.

Problema 3: Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x+1} + \frac{9}{\sqrt{x+1}} = 6$$

Solución : Asumiendo que $x > -1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)^2} + 9 &= 6\sqrt{x+1} \\
x + 1 + 9 &= 6\sqrt{x+1} \\
6\sqrt{x+1} &= x + 10 \\
36(x+1) &= x^2 + 20x + 100 \\
x^2 - 16x + 64 &= 0 \\
(x-8)^2 &= 0 \\
x &= 8,
\end{aligned}$$

luego, la única solución al problema es $x = 8$.

Problema 4: Resuelva la ecuación

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2$$

Solución : Observemos que para que la ecuación tenga sentido, $x \geq 0$. Elevando al cubo, tenemos:

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{x} &= 8 \\ \sqrt{x} &= 7 \\ x &= 49, \end{aligned}$$

luego, $x = 49$.

Problema 5: Resuelva la ecuación

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2x}\ , \text{ para } a\in\mathbb{R}$$

indicando las restricciones que tiene el problema.

Solución:
Para que la ecuación tenga sentido debe cumplirse que $-a \leq x \leq a$.
Elevando al cuadrado, tenemos:

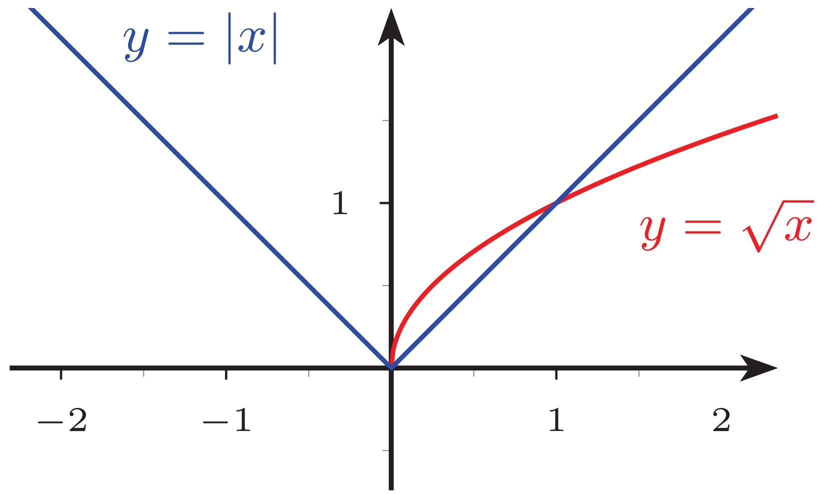
$$\begin{aligned} a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x &= 2x \\ \sqrt{a^2-x^2} &= x-a \\ a^2-x^2 &= x^2-2ax+a^2 \\ x(x-a) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $x=0$ o $x=a$, luego la única solución es $x=a$. ¿Esto es para cada $a\in\mathbb{R}$?.

Problema 6: Resuelva de forma algebraica y gráficamente la ecuación

$$\sqrt{x} = |x|$$

Solución: Graficando las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = |x|$,



observamos que las gráficas se cortan en dos puntos: $(0,0)$ y $(1,1)$, de modo que existen dos soluciones de la ecuación: $x = 0$ y $x = 1$.

Resolución algebraica

Como $\sqrt{x}$ está definida solo para $x \geq 0$, asumimos que x es no negativo, y bajo este supuesto la ecuación queda

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= x \\
\sqrt{x} - x &= 0 \\
\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{x} &= 0 \\
\sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) &= 0,
\end{aligned}$$

luego $\sqrt{x} = 0$ o bien $\sqrt{x} = 1$, de donde se obtienen las soluciones, $x = 0$ y $x = 1$.

Problema 1: Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x} - 3$

b) $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$

c) $2 + 7\sqrt{x^3} = 9 + \sqrt[4]{x^3}$

d) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 3 + \dfrac{\sqrt{x}+1}{2}$