Clase 5
Funciones exponencial y logarítmica

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2014

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Se define la función logaritmo de x, en base a, denotada por $\log_a(x)$, como:

$$\log_a(x) = y \Longleftrightarrow x = a^y.$$

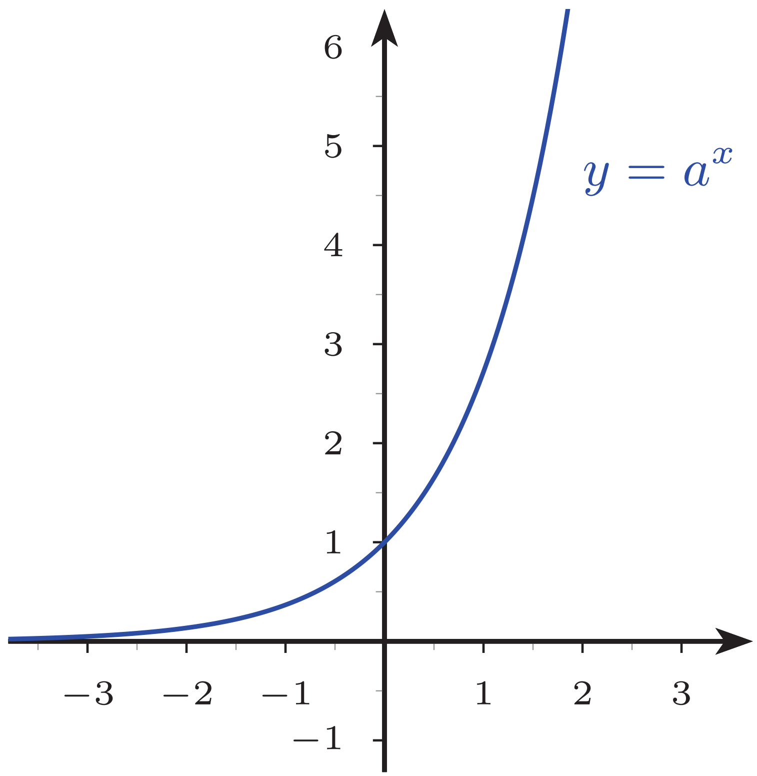
La función logarítmica con base e, se llama logaritmo natural, y se denota por $\ln(x)$, es decir:

$$\ln(x) = y \Longleftrightarrow x = e^y$$

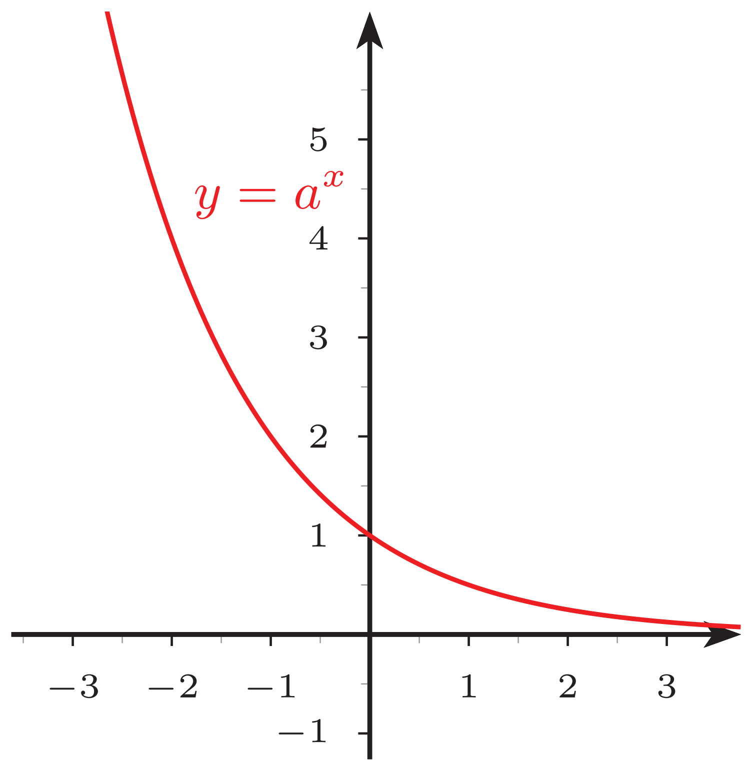
Notamos que la función logarítmica está definida en términos de la función exponencial $f(x) = a^x$.

La representación gráfica y algunas propiedades de estas funciones, se muestran a continuación:

$f(x) = a^x$, con $a > 1$



$f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$.

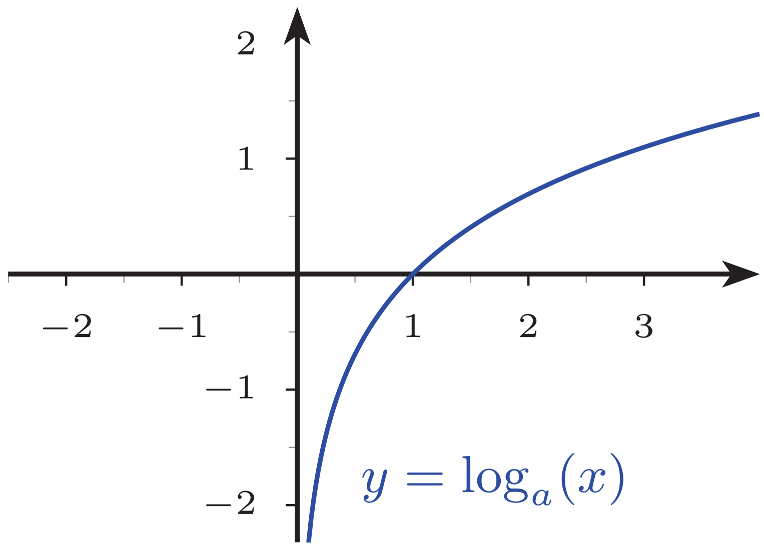


Observe que:

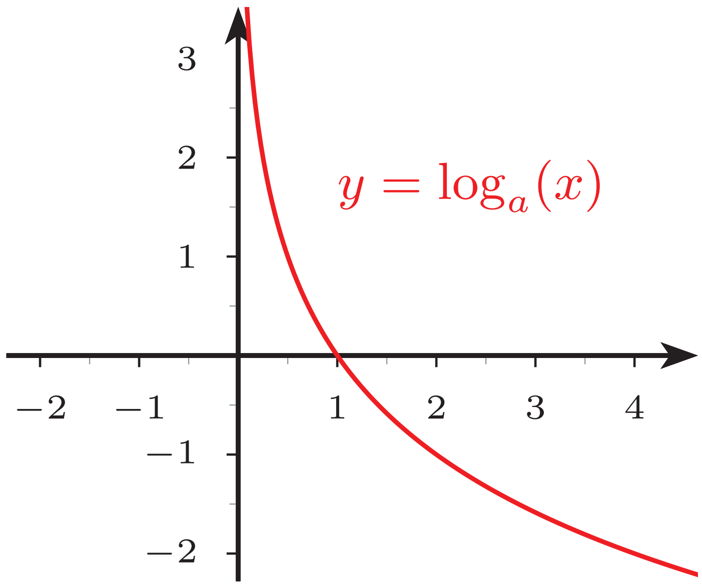
- si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función creciente,
- si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función decreciente,
- en ambos casos $f(0) = 1$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Función logarítmica, $f(x) = \log_a(x)$

$f(x) = \log_a(x)$, con $a > 1$



$f(x) = \log_a(x)$, con $0 < a < 1$



Observe que:

- si $a > 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función creciente,
- si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es una función decreciente,
- si $a > 1$, $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$, mientras que $f(x) > 0$ para $x \in (1, \infty)$,
- si $0 < a < 1$, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$, mientras que $f(x) < 0$ para $x \in (1, \infty)$,
- en ambos casos $f(1) = 0$ y $f(a) = 1$.

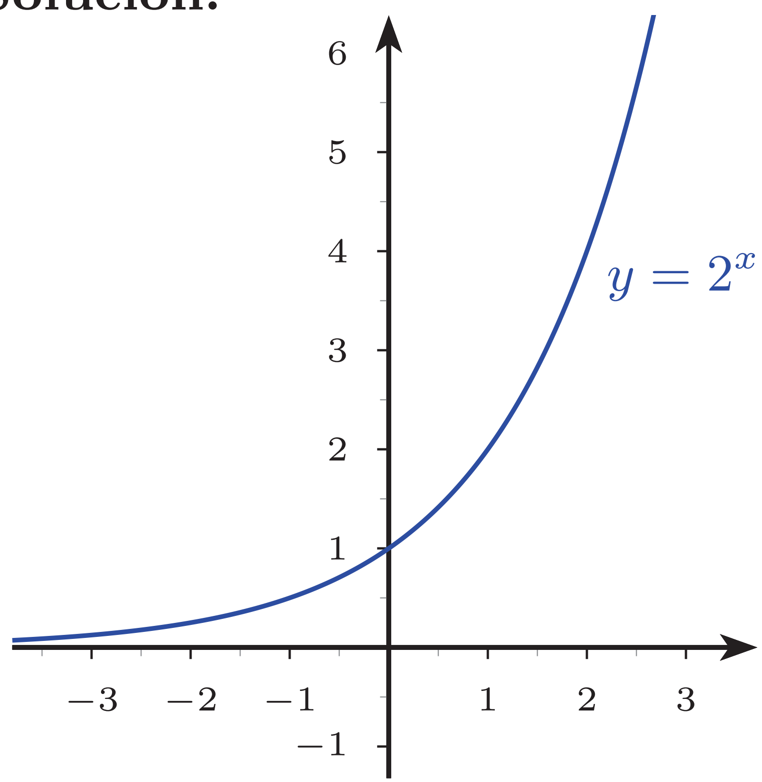
Problema 1: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = 2^x$ y responda:

a) ¿El gráfico de la función corta al eje X?

b) ¿El gráfico de la función corta al eje Y?, ¿en qué punto?

c) La expresión $y = (-2)^x$, ¿representa una función exponencial?

Solución:



a) La gráfica no corta el eje X, pues $2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) La intersección de la gráfica y eje Y es el punto $(0, 1)$.

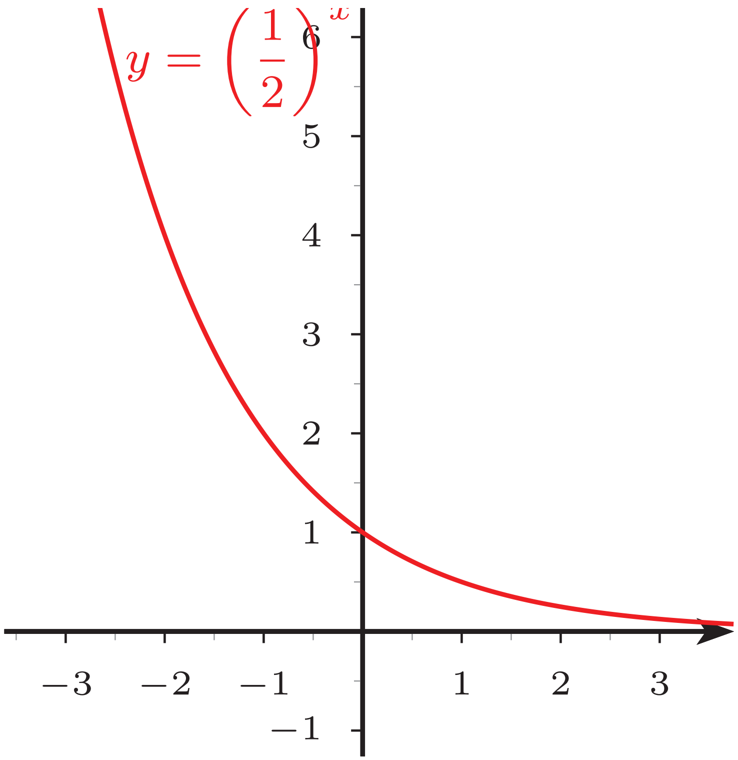
c) La expresión $(-2)^x$ no representa una función exponencial, pues la base es menor que cero.

Problema 2: Esboce el gráfico de la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y responda:

a) ¿el gráfico corta al eje Y en algún punto?, ¿cuál?

b) ¿el gráfico corta al eje X en algún punto?

Solución

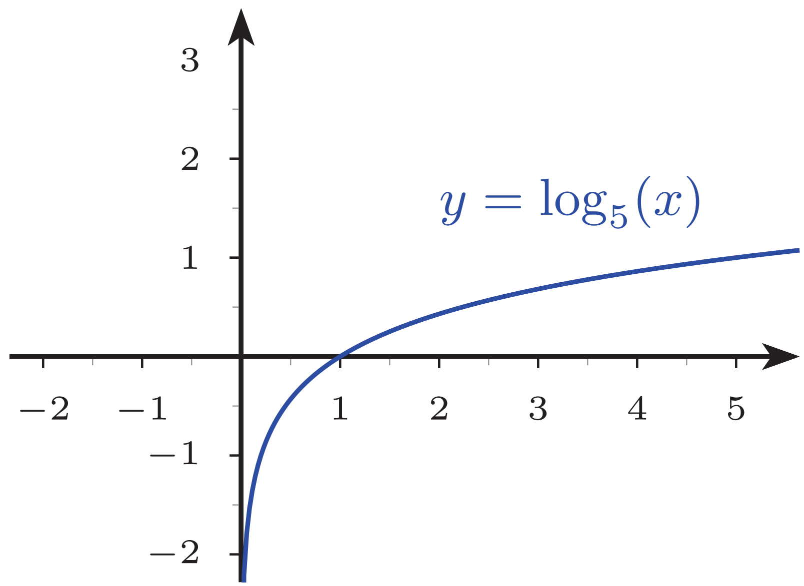


a) La gráfica corta al eje Y en el punto $(0, 1)$.

b) La gráfica no corta al eje X, pues $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 3: Determine si existe algún punto de intersección entre la gráfica de la función $f(x) = \log_5(x)$ con el eje X.

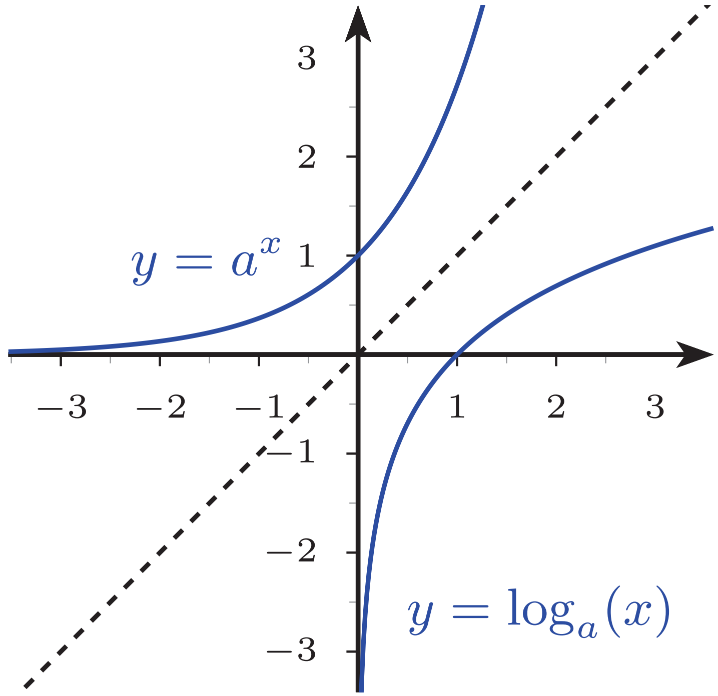
Solución: La gráfica de una función logarítmica corta al eje X en el punto $(1, 0)$, tal como se ve en la gráfica de $f(x) = \log_5(x)$:



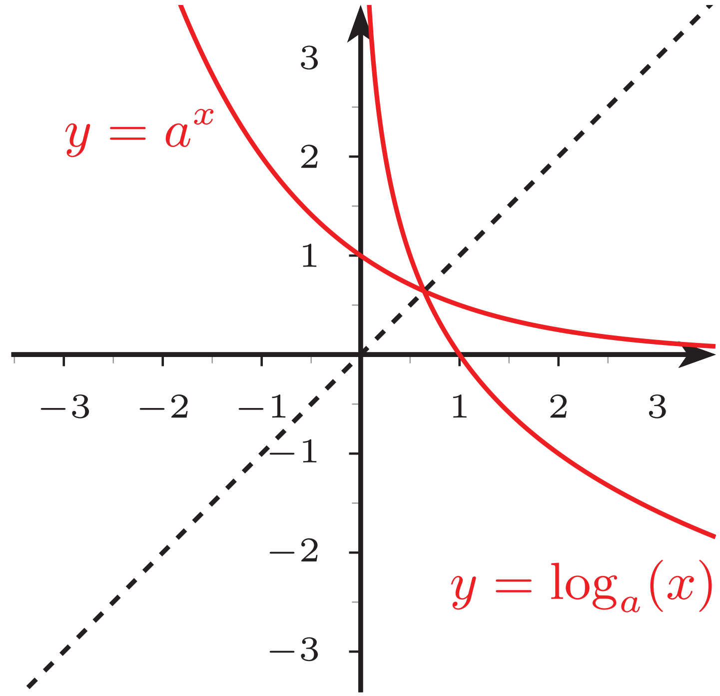
Simetría entre los gráficos de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a(x)$

Observe que los gráficos de las funciones exponencial y logarítmica son simétricos respecto de la recta $y = x$.

Para $a > 1$



Para $0 < a < 1$



¿En qué punto del plano se cortan las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica?

Algunas propiedades de los logaritmos que debemos recordar, son las siguientes:

Propiedades

Para $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene que:

1. Logaritmo de un producto: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. Logaritmo de un cuociente: $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. Logaritmo de una potencia: $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$
4. Cambio de base de un logaritmo: $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Problema 4: ¿Cuál debe ser el valor de x, en las siguientes expresiones?

a) $\log_6 x = 3$

Solución: $\log_6 x = 3 \Longleftrightarrow 6^3 = x$, luego $x = 216$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$

Solución: $\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = x$, luego $x = 2$

c) $\log_x \frac{1}{8} = 3$

Solución: $\log_x \frac{1}{8} = 3 \Longleftrightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

d) $\log_2 \frac{1}{8} = x$

Solución: $\log_2 \frac{1}{8} = x \Longleftrightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Longleftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Longleftrightarrow x = -3$

Problema 5: Aplicando las propiedades de los logaritmos, obtenga el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_b b + \log_a a$

Solución: $\log_b b + \log_a a = 1 + 1 = 2$

b) $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n$

Solución: $\log_c 1 + \log_b b^n + \log_d d^n = 0 + n \log_b b + n \log_d d = n + n = 2n$

c) $\log_a (ac) + \log_p p^3 + \log_b b - \log_a c$

Solución:
$\log_a (ac) + \log_p p^3 + \log_b b - \log_a c = \log_a a + \log_a c + 3 \log_p p + 1 - \log_a c = 5$

Problema 6: Calcule el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log(0,0001)$

Solución: $\log(0,0001) = \log(10^{-4}) = -4\log 10 = -4$

b) $\log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned} \log(20) + \log\left(\frac{10}{2}\right) &= \log(2\cdot 10) + \log(10) - \log(2) \\ &= \log(2) + \log(10) + \log(10) - \log(2) = 2 \end{aligned}$$

c) $\log(10^{-4}) + \log\left(\frac{1}{100}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned} \log(10^{-4}) + \log\left(\frac{1}{100}\right) &= -4\log(10) + \log(10^{-2}) \\ &= -4\log(10) - 2\log(10) = -6 \end{aligned}$$

Problema 7: Aplicando las propiedades de los logaritmos, desarrolle las siguientes expresiones:

a) $\log \dfrac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy}$

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy} &= \log 5a^2b^4\sqrt{c} - \log 2xy \\ &= \log 5 + 2\log a + 4\log b + \frac{1}{2}\log c - \log 2 - \log x - \log y\end{aligned}$$

b) $\log \left(\dfrac{a\sqrt{c}}{2}\right)^4$

Solución:

$$\log \left(\frac{a\sqrt{c}}{2}\right)^4 = 4\left(\log a + \frac{1}{2}\log c - \log 2\right) = 4\log a + 2\log c - 4\log 2$$

c) $\log \sqrt{\dfrac{2ab}{x^2y}}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\log \sqrt{\frac{2ab}{x^2y}} &= \frac{1}{2}\left(\log 2ab - \log x^2y\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\log 2 + \log a + \log b - 2\log x - \log y\right) \\
&= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log b - \log x - \frac{1}{2}\log y
\end{aligned}$$

Problema 1: Verifique si $\log_c a \cdot \log_a b \cdot \log_b c = 1$.

Problema 2: La cantidad Q de carbono 14 radioactivo, que permanece t años después de que un organismo muere, está dada por el modelo

$$Q = Q_0 e^{-0{,}00121t}$$

Un cráneo humano es descubierto en una excavación arqueológica y tiene un 15 % de la cantidad original de carbono 14 presente ¿Cuál es la edad de ese cráneo?