Clase 4
Funciones polinomiales y racionales

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo de 2014

Polinomios

Definición

Se llama **polinomio** en x a toda expresión de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

donde a_i, $i = 0, \ldots, n$ son constantes llamados **coeficientes** del polinomio. Si $a_n \neq 0$ y $n \neq 0$ se dice que el polinomio tiene **grado** n.

Observación

Notamos que el polinomio p asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ un único número real $p(x)$, de modo que el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

es una función real que llameremos **función polinomial**.

Observe que:

- Si $n = 0$, el polinomio p es $p(x) = a_0$, es decir una función constante.
- Si $n = 1$ el polinomio p es $p(x) = a_0 + a_1 x$, es decir una función lineal.
- Si $n = 2$, el polinomio p es $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, es decir una función cuadrática.

Operaciones con polinomios

Proposición

La suma, resta y producto de dos polinomios es un polinomio.

Ejemplo: Sean $p(x) = -x^2 + x + 3$ y $q(x) = x^2 + 5$. Calcule:

1. $p(x) + q(x)$
2. $p(x) - q(x)$
3. $p(x) \cdot q(x)$

Solución:

1. $p(x) + q(x) = x + 8$
2. $p(x) - q(x) = -2x^2 + x - 2$
3. $p(x) \cdot q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 15$

Observación

Dado los polinomios p y q de grados n y m respectivamente, el grado del polinomio $p(x) + q(x)$ es siempre menor o igual que $\max\{m, n\}$ y el grado del polinomio $p(x) \cdot q(x)$ es $m + n$.

Definición

Sea $p(x)$ un polinomio. Si α es un número tal que $p(\alpha) = 0$, diremos que α es una **raíz del polinomio p.**

Ejemplos

1. Muestre que -1 es una raíz del polinomio $p(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 11$
   Solución:
   $$\begin{aligned} p(-1) &= -(-1)^4 + 3(-1)^3 - 2(-1)^2 + 5(-1) + 11 \\ &= -1 - 3 - 2 - 5 + 11 \\ &= -11 + 11 = 0. \end{aligned}$$
   Por lo tanto -1 es raíz de p.
2. ¿El polinomio $p(x) = x^2 + 1$, tiene raíces reales?

   Solución: p no tiene raíces reales, pues $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observación

Notamos que las raíces de un polinomio p, corresponden a los ceros de p.

Problema 1: Encuentre los valores de a y b de modo que $x = 1$ y $x = -1$ sean raíces del polinomio

$$p(x) = 3x^3 - 4x^2 + ax + b$$

Solución:
Si 1 es raíz de p, entonces $p(1) = 3 - 4 + a + b = 0$, es decir

$$a + b = 1$$

Por otra parte, si -1 es raíz de p entonces $p(-1) = -3 - 4 - a + b = 0$, es decir

$$-a + b = 7,$$

de modo que si $x = 1$ y $x = -1$ son raíces de p, los coeficientes a y b deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -a + b &= 7, \end{aligned}$$

resolviendo, obtenemos $a = -3$ y $b = 4$.

División de polinomios

Teorema

Dados dos polinomios p y s, donde s es distinto del polinomio nulo, existen dos únicos polinomios q y r tales que

1. $p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$,
2. El grado de r es menor que el grado de s o bien r es el polinomio nulo.

El polinomio q corresponde al **cuociente** y r al **resto** de la división $p(x) : s(x)$.

Para encontrar el cuociente y resto de la división entre dos polinomios, utilizamos el **algoritmo de la división**, el cual es descrito en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Encontrar el cuociente y el resto al dividir el polinomio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ en $s(x) = x^2 + x + 1$

Solución:

1. Escribimos los polinomios p y s en orden decreciente de sus potencias.

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 : x^2 + x + 1$$

2. El término de mayor grado de p es $2x^3$ y el de s es x^2. Buscamos entonces el factor que multiplicado por x^2 nos da $2x^3$, en este caso es $2x$. Escribimos $2x$ en el cuociente

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 : x^2 + x + 1 = {\color{red}2x}$$

3. Calculamos el polinomio $p_1(x) = 2x \cdot s(x)$

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 : x^2 + x + 1 = 2x$$
$$2x^3 + 2x^2 + 2x$$

4. Calculamos la diferencia $r_1(x) = p(x) - p_1(x)$:

$$\begin{array}{l} 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 : x^2 + x + 1 = 2x \\ -(2x^3 + 2x^2 + 2x) \\ \hline x^2 - 6x + 1 \end{array}$$

5. Si el grado de r_1 es menor que el grado de s, el proceso termina y r_1 es el resto, de lo contrario repetimos el proceso ahora con el polinomio r_1. En nuestro caso, el grado de r_1 es dos y es igual al grado de s, luego debemos repetir el proceso:

$$\begin{array}{l} 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 : x^2 + x + 1 = 2x + 1 \\ -(2x^3 + 2x^2 + 2x) \\ \hline x^2 - 6x + 1 \\ -(x^2 + x + 1) \\ \hline -7x \end{array}$$

6. El polinomio $r_2(x) = -7x$ tiene grado menor que el grado de s y por lo tanto el proceso ha finalizado y el resto es $r_2(x) = -7x$, mientras que el cuociente es $q(x) = 2x + 1$. Por lo tanto $2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x^2 + x + 1)(2x + 1) - 7x$

Problema 2: Considere los polinomios $p(x) = 2x^4 - x^3 + 3x + 4$ y $s(x) = x + 1$. Determine el resto y el cuociente que se obtiene al dividir p por s y responda:

1. ¿El cuociente $\dfrac{p(x)}{s(x)}$ es un polinomio?
2. ¿El cuociente de dos polinomios es siempre un polinomio?

Solución:

$$\begin{array}{l}
2x^4 - x^3 + 3x + 4 : x + 1 = 2x^3 - 3x^2 + 3x \\
\underline{-(2x^4 + 2x^3)} \\
\quad - 3x^3 + 3x + 4 \\
\quad \underline{- (-3x^3 - 3x^2)} \\
\qquad 3x^2 + 3x + 4 \\
\qquad \underline{- (3x^2 + 3x)} \\
\qquad\qquad 4
\end{array}$$

Por lo tanto el resto de la división es el polinomio constante $r(x) = 4$ y el cuociente $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x$.

1. Como p puede expresarse como $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, en nuestro caso

$$2x^4 - x^3 + 3x + 4 = (x+1)(2x^3 - 3x^2 + 3x) + 4,$$

se tiene que

$$\frac{p(x)}{s(x)} = \frac{2x^4 - x^3 + 3x + 4}{x+1} = \frac{(x+1)(2x^3 - 3x^2 + 3x)}{x+1} + \frac{4}{x+1}$$
$$= 2x^3 - 3x^2 + 3x + \frac{4}{x+1},$$

de donde concluimos que el cuociente $\frac{p(x)}{s(x)}$ no es un polinomio, pues es suma del polinomio $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x$ y la **función racional** $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{4}{x+1}$.

2. El ejemplo anterior, muestra que no siempre el cuociente de dos polinomios da como resultado un polinomio, entonces cabe preguntarse:

¿Bajo qué condiciones el cuociente $\frac{p(x)}{s(x)}$ es un polinomio?

Definición

Sean p y s polinomios tales que el grado de p es mayor o igual que el grado de s. Si el resto de la división $p : s$ es cero, diremos que el polinomio s divide a p.

Observación

Consideremos los polinomios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad \text{y} \quad s(x) = b_0 + b_1 x + \cdots b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m$$

y el cuociente

$$\frac{p(x)}{s(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m}$$

1. Si $n > m$ y s divide a p entonces cuociente $\dfrac{p(x)}{s(x)}$ es un polinomio de grado $n - m$.
2. Si $n < m$ entonces el cuociente $\dfrac{p(x)}{s(x)}$ es una **función racional**.

Problema 3: Divida el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 25x + 50$ por el polinomio $s(x) = x - 2$ y utilice el resultado para factorizar el polinomio p y obtener sus raíces.

Solución

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 - 25x + 50 : x - 2 = x^2 - 25 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\quad - 25x + 50 \\
\qquad \underline{- (-25x + 50)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

de modo que $x - 2$ divide a $x^3 - 2x^2 - 25x + 50$ y por lo tanto

$$x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = (x - 2)(x^2 - 25),$$

factorizando una vez más tenemos que

$$p(x) = (x - 2)(x - 5)(x + 5),$$

por lo tanto $p(x) = 0$ solo si $x = 2$, $x = 5$ o $x = -5$, es decir las raíces del polinomio son $x_1 = -5$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 5$

Función racional

Definición

Una función real f se dice una **función racional**, si puede expresarse en la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son polinomios en la variable x y q no es el polinomio nulo.

El **dominio** de una función racional está compuesto por todos los números reales excepto aquellos que son raíces del polinomio del denominador.

Ejemplo: Determine el dominio de la función racional $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ y esboce su gráfico.

Solución: Según la defínción, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{x : x \text{ es raíz de } p(x) = x^2 - 1\}$

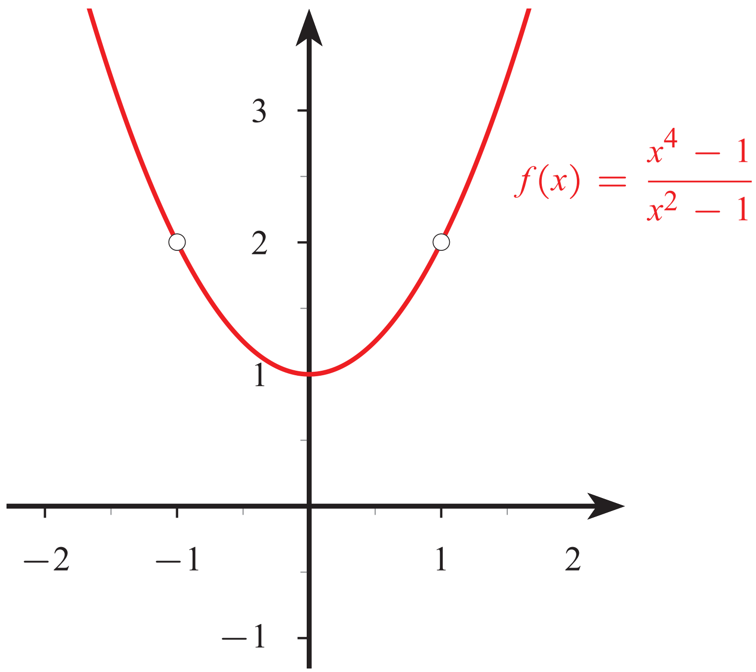
Notamos que $p(x) = 0$ si y solo si $x^2 - 1 = 0$, esto es si $(x-1)(x+1) = 0$, es $x = 1$ y $x = -1$, luego

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Para hacer el gráfico de f notamos que para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, se tiene que

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1,$$

de modo que el gráfico de f es igual al gráfico de la función cuadrática $g(x) = x^2 + 1$, excepto en $x = -1$ y $x = 1$ donde f no está definida, es decir:



Problema 4: Considere la función racional $f(x) = \dfrac{3x-11}{x-4}$

1. Determine el dominio de f y su gráfico.
2. Sin resolver, determine si la ecuación $f(x) = 3$ tiene solución. ¿Cuál es el recorrido de f?

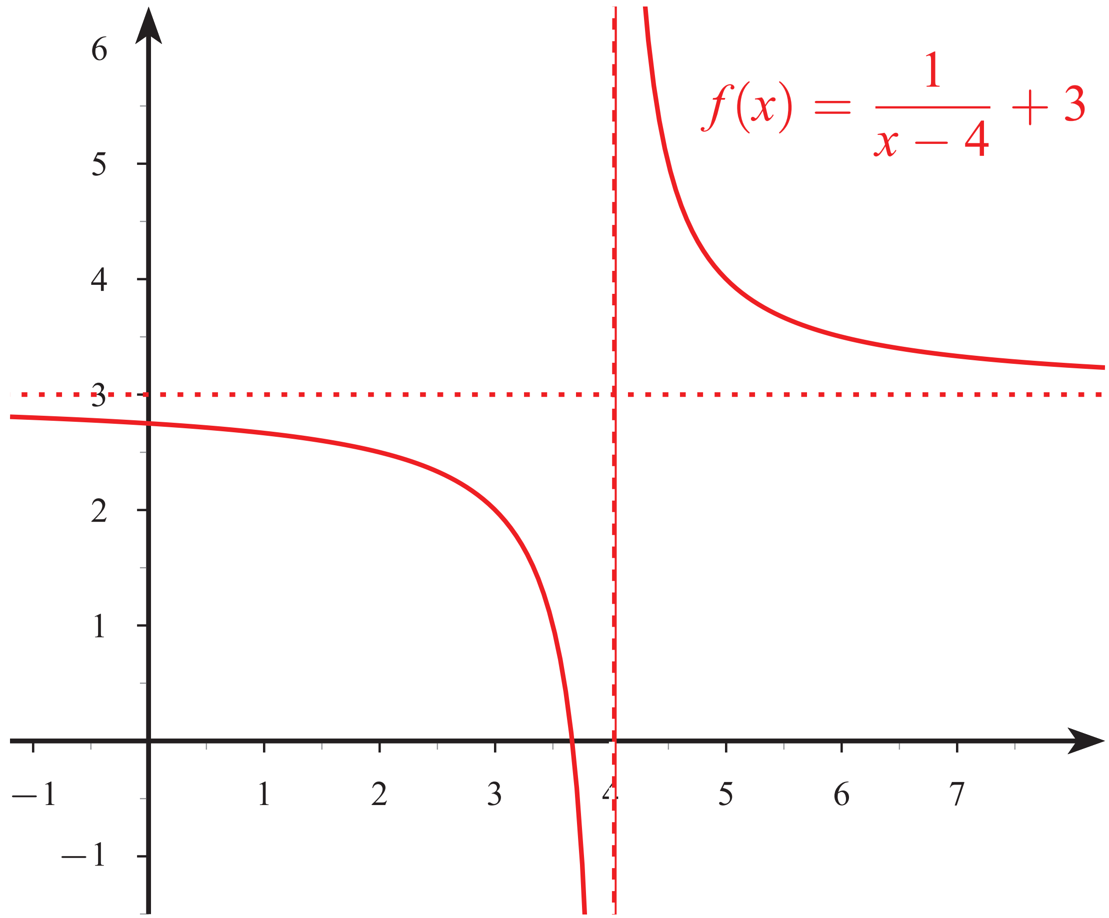
Solución

1. El dominio de f es el conjunto $\mathrm{Dom} = \mathbb{R} - \{4\}$.

   Ahora, utilizando el algoritmo de la división, obtenemos que $3x - 11 = 3(x-4) + 1$, de modo que

   $$\begin{aligned} f(x) = \frac{3x-11}{x-4} &= \frac{3(x-4)}{x-4} + \frac{1}{x-4} \\ &= 3 + \frac{1}{x-4}, \end{aligned}$$

   de modo que el gráfico de f se obtiene trasladando el gráfico de la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$, 3 unidades hacia arriba y 4 unidades a la derecha.



- A partir del gráfico de f podemos concluir que la ecuación $f(x) = 3$ no tiene solución, pues la recta $y = 3$ no corta al gráfico de f en punto alguno. También a partir del gráfico podemos determinar que $\operatorname{Rec} f = \mathbb{R} - \{3\}$

Problema 1

El servicio de traumatología de un hospital ha implamentado un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se estima que a partir de ahora la siguiente función indicará el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera, en el momento t (en meses).

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & \text{si } 0 \leq t \leq 10; \\ \dfrac{190t - 500}{2t}, & \text{si } t > 10. \end{cases}$$

1. Determine el porcentaje de pacientes que actualmente puede ser operado sin entrar en lista de espera.
2. ¿Qué porcenteje de pacientes se encontrará en lista de espera luego de 10 meses de ser implementado el nuevo sistema?
3. ¿Después de cuántos meses de ser implementado el sistema, el porcentaje de pacientes que pueden ser operados sin entrar en lista de espera será de un 90 %?
4. ¿Puede el nuevo sistema eliminar la lista de espera?.