Clase 3
Funciones lineal y cuadrática

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo de 2014

Función lineal

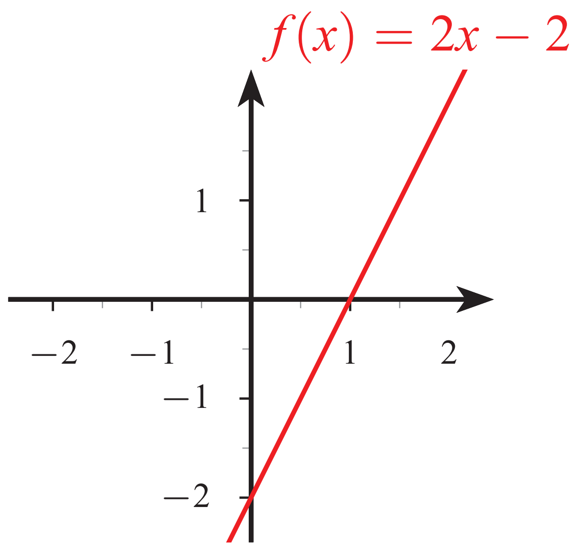
Definición

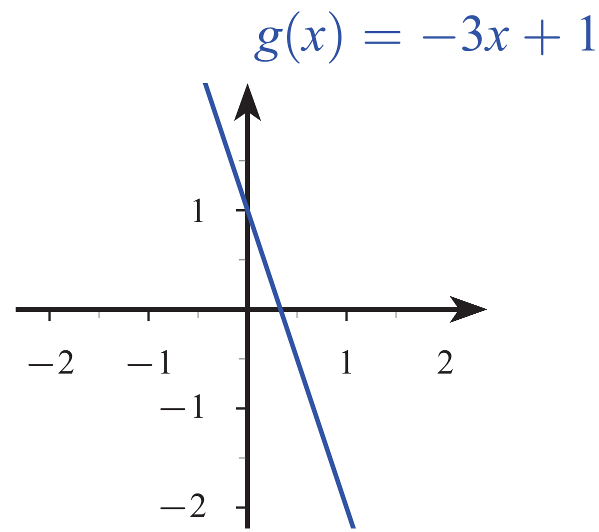
Una relación de la forma $f(x) = mx + n$, donde $m, n \in \mathbb{R}$, se llama función lineal

Gráfica de la función lineal

La gráfica de esta función corresponde a una **recta** en el plano.

Ejemplos





1. ¿Cuál es el dominio y recorrido de las funciones f y g?.
2. f y g son funciones ¿crecientes?, ¿decrecientes?.

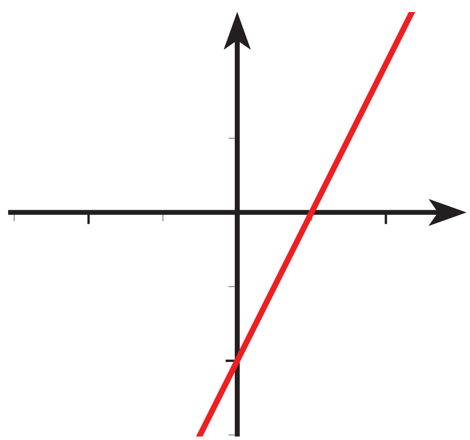
Gráfica de una función lineal

Pendiente de la recta

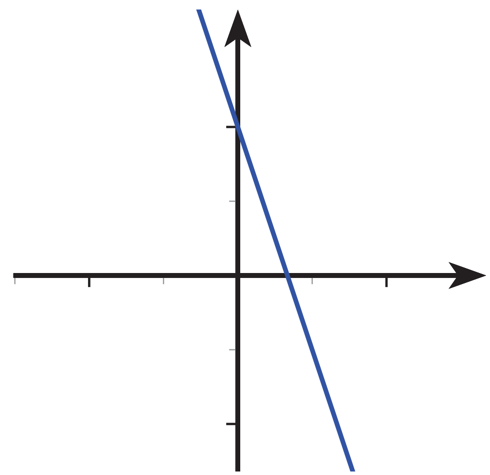
La inclinación de recta $y = mx + n$ respecto del eje X, depende del coeficiente de la variable x, este valor corresponde a la **pendiente de la recta**.

Según sea el signo del coeficiente m ($m \neq 0$), tendremos una de las siguientes situaciones:

Pendiente positiva
($m > 0$)



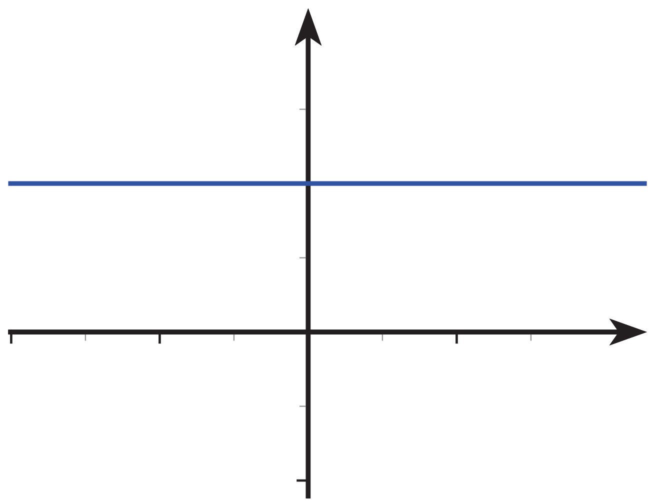
Pendiente negativa
($m < 0$)



Notamos que si $m > 0$, la función lineal es creciente, mientras que si $m < 0$ la función es decreciente.

Si $m = 0$ entonces la **función es constante**, es decir $f(x) = n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y su gráfico corresponde a una recta paralela al eje X.

$$y = n$$



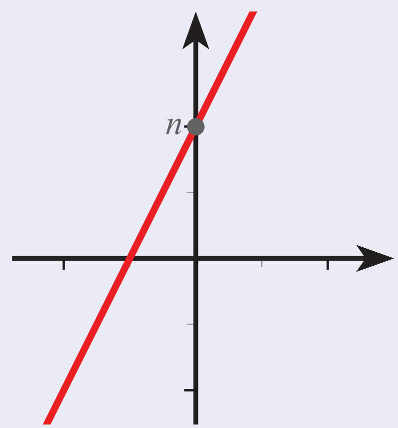
- ¿Cómo es el gráfico de la recta $x = n$?
- ¿La ecuación $x = n$ respresenta una función?

Intersección con los ejes coordenados

- El punto de intersección de la gráfica de una función real f y el eje Y es $(0, f(0))$.
- Los puntos de intersección con el eje X, son de la forma $(x, 0)$, tales valores de x, es decir aquellos valores para los cuales $f(x) = 0$, se llaman **ceros** de f.

Coeficiente de posición de la recta

En el caso de la función lineal $f(x) = mx + n$, el punto de intersección con el eje Y es $(0, n)$, por lo cual n recibe el nombre de **coeficiente de posición**.



Solución de una ecuación lineal

La solución de la ecuación $mx + n = 0$ (donde $m \neq 0$), corresponde al único cero de la función lineal $f(x) = mx + n$.

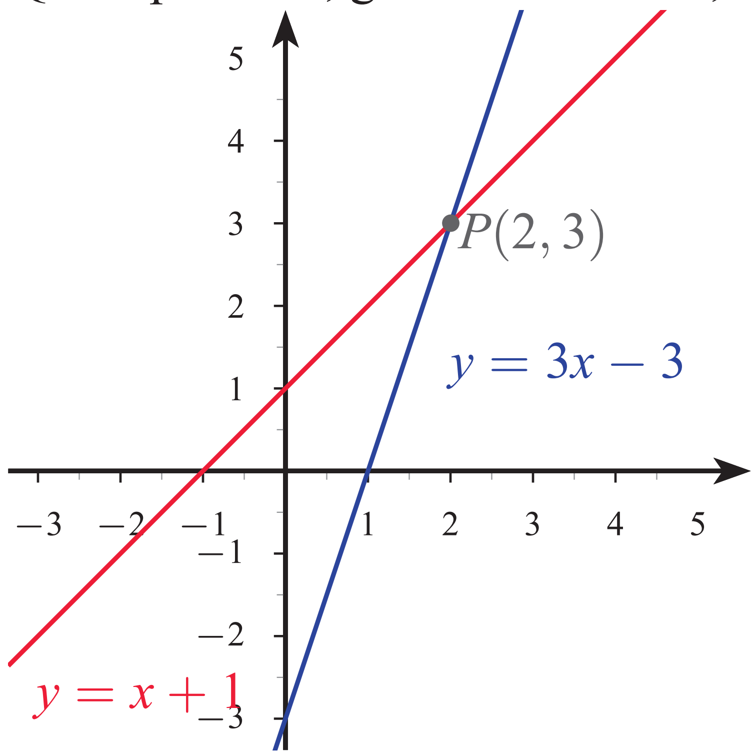
Ejemplo: Resuelva la ecuación

$$\frac{4}{3}(x+8) = \frac{3}{4}(2x+12)$$

Solución:

$$\begin{aligned} 16(x+8) &= 9(2x+12) \\ 16x + 128 &= 18x + 108 \\ -2x &= -20 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

¿ Qué representa, geométricamente, la solución de la ecuación $3x - 3 = x + 1$?.



Notamos que:

- El lado izquierdo de la ecuación representa la recta $y = 3x - 3$
- El lado derecho de la ecuación representa la recta $y = x + 1$
- Resolviendo algebraicamente la ecuación, obtenemos la solución $x = 2$.

La solución corresponde a la primera coordenada del punto de intersección entre ambas rectas.

Observación

¿ Cuál es la solución de $3x - 3 < x + 1$?

Problema 1: Resuelva la ecuación

$$2-\left[-2(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Solución :

$$\begin{aligned}2+2(x+1)+\frac{x-3}{2}&=\frac{23}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x\\24+24(x+1)+6(x-3)&=8x-(5x-3)+36x\\-9x&=-27\\x&=3\end{aligned}$$

Problema 2: Determine los valores de x que satisfacen la ecuación

$$\frac{3(a-x)}{b} - \frac{2(b-x)}{a} = \frac{2b^2 - 6a^2}{ab} \quad a \neq 0\,,\; b \neq 0$$

Solución :

$$\begin{aligned} 3a(a-x) - 2b(b-x) &= 2b^2 - 6a^2 \\ 3a^2 - 3ax - 2b^2 + 2bx &= 2b^2 - 6a^2 \\ -(3a-2b)x &= 4b^2 - 9a^2 \\ x &= -\frac{(2b-3a)(2b+3a)}{3a-2b} \\ x &= 3a + 2b \text{ , siempre que } a \neq \frac{2}{3}b. \end{aligned}$$

Observación

¿Cuál es el recíproco de la afirmación $(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$?

Para la resolución de problemas, considere los siguientes pasos:

- Lea cuidadosamente el problema, reiteradas veces si es necesario.
- Represente una de las cantidades desconocidas con una variable y escriba las otras cantidades conocidas en términos de la variable escogida.
- Haga un resumen de la información dada.
- Escriba ecuaciones que relacionen las cantidades conocidas con las incógnitas.
- Resuelva la ecuación.
- Responda todas las preguntas planteadas en el problema y verifique las soluciones.

En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres, y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Si en la reunión hay 96 personas, ¿ Cuántos hombres, mujeres y niños hay?.

Solución:

Sea x el número de hombres en la reunión, entonces

$$x + 2x + 3(x + 2x) = 96,$$

de donde $x = 8$ y por lo tanto en la reunión hay 8 hombres, 16 mujeres y 72 niños.

Definición

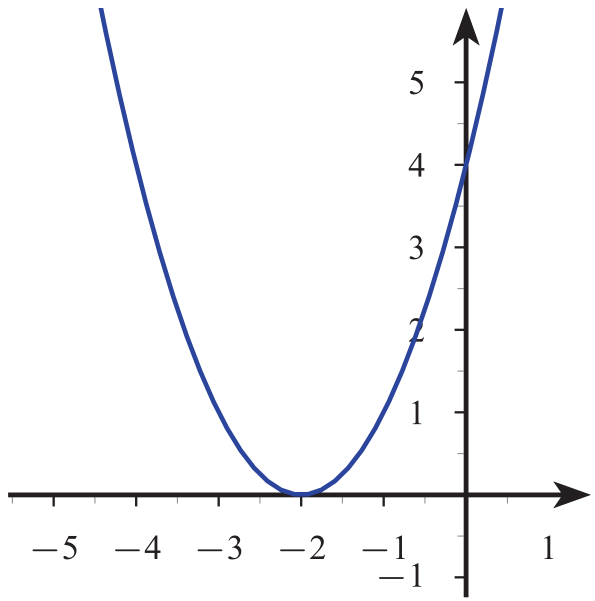
Una relación de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$ y $b, c \in \mathbb{R}$, se llama función cuadrática.

Gráfica de la función cuadrática

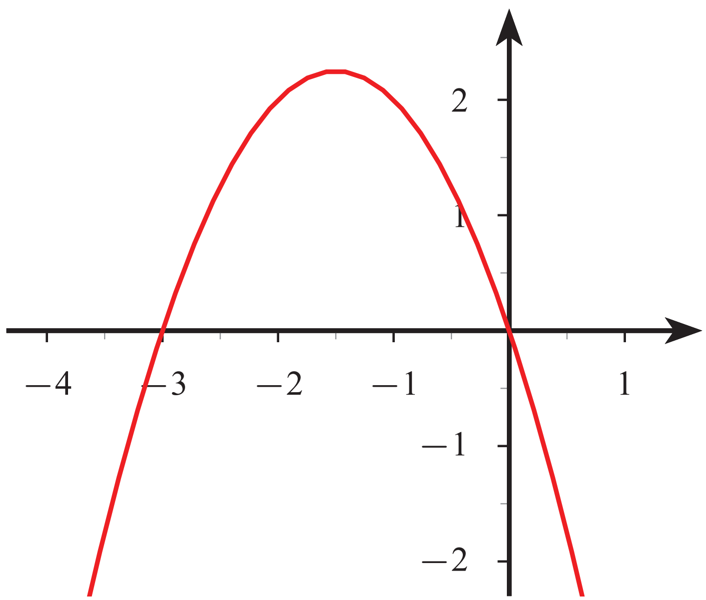
La gráfica de esta función corresponde a una curva llamada **parábola.**

Ejemplos

$f(x) = x^2 + 4x + 4$



$g(x) = -x^2 - 3x$

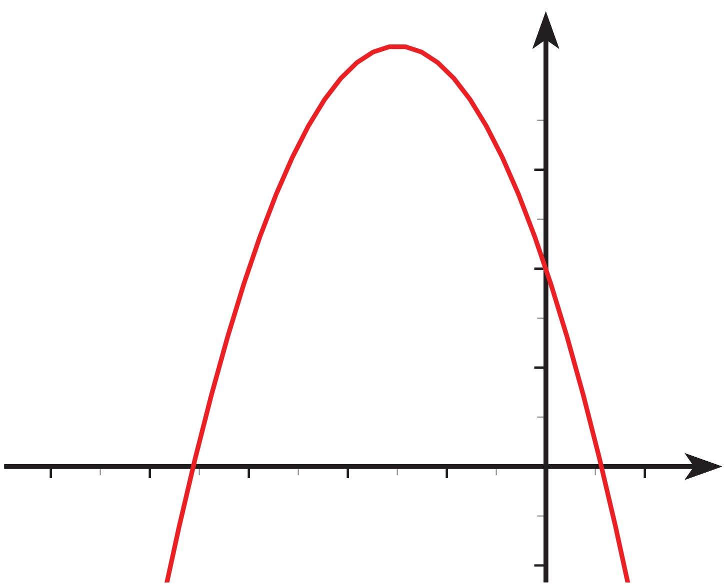


Concavidad y convexidad

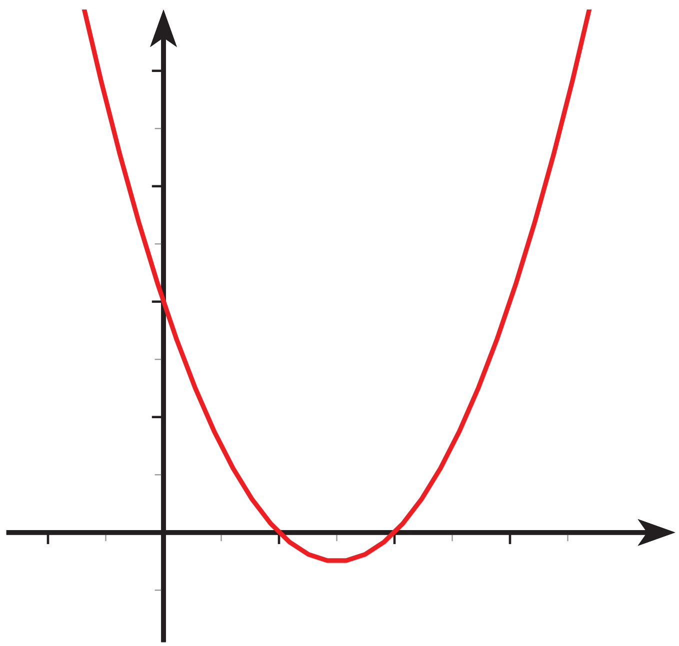
Según sea el signo del coeficiente que acompaña a x^2, la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, puede ser:

- **Cóncava:** la parábola “abre hacia abajo”.
- **Convexa:** la parábola “abre hacia arriba”.

Cóncava ($a < 0$)



Convexa ($a > 0$)



Ceros de la función cuadrática

Ceros de una función

Se llaman **ceros** de una función $f(x)$ a aquellos valores $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 0$, es decir corresponden a la primera coordenada de los puntos en que la gráfica de la función corta al eje X.

En el caso de la función cuadrática, existen **a lo más dos** ceros, o puntos de intersección de la gráfica con el eje X.

Ecuación cuadrática

Para encontrar los ceros de la función cuadrática debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, es decir

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Soluciones de la ecuación cuadrática

Resolveremos de modo general la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. Notamos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + {\color{red}2} \cdot \frac{b}{{\color{red}2}a}x + \frac{c}{a} + {\color{blue}\left(\frac{b}{2a}\right)^2} - {\color{blue}\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

de modo que $ax^2 + bx + c = 0$ si y solo si $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$,

despejando x en esta última ecuación, obtnemos:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \Leftrightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| &= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Soluciones de la ecuación cuadrática

Hemos visto que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, están dadas por la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

Discriminante

Se define el discriminante de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, como la expresión

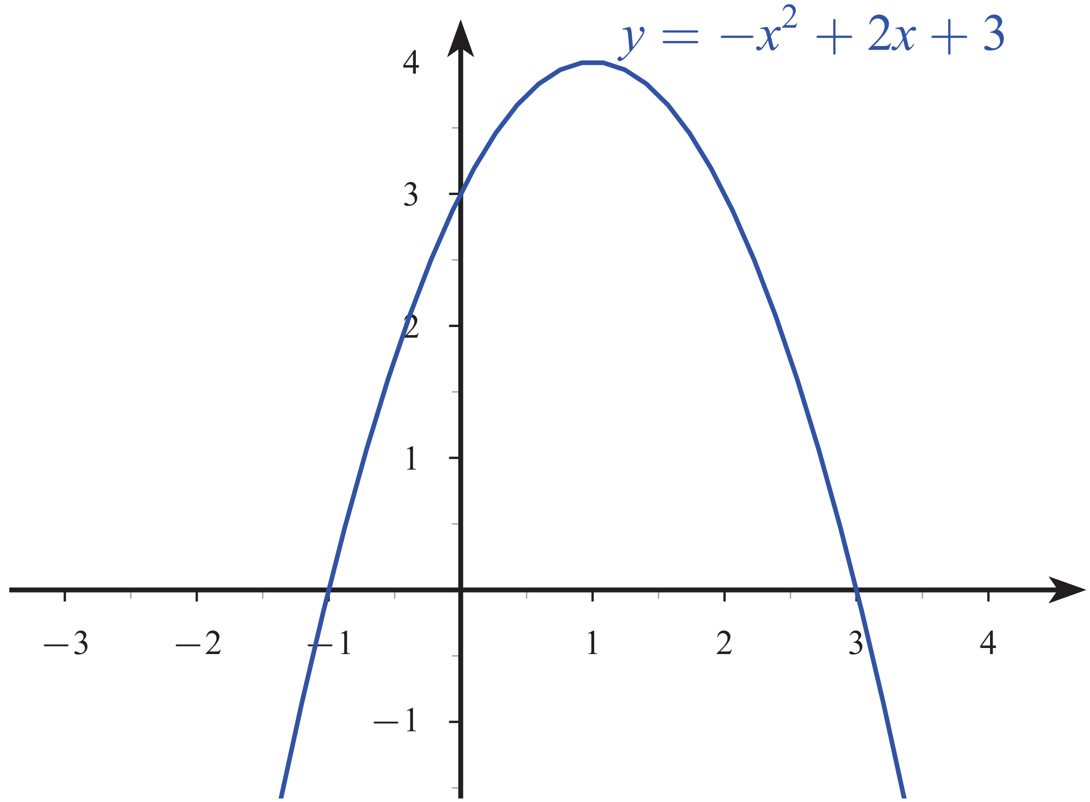
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dependiendo del signo del discrimiante se tiene que:

- Si $\Delta > 0$, las dos raíces son reales y distintas, esto es; la parábola corta al eje X en dos puntos.
- Si $\Delta = 0$, las dos raíces son reales e iguales, es decir la parábola corta al eje X en un único punto.
- Si $\Delta < 0$, las dos raíces son complejas conjugadas y en tal caso no existe intersección entre la parábola y el eje X.

Función cuadrática con $\Delta > 0$

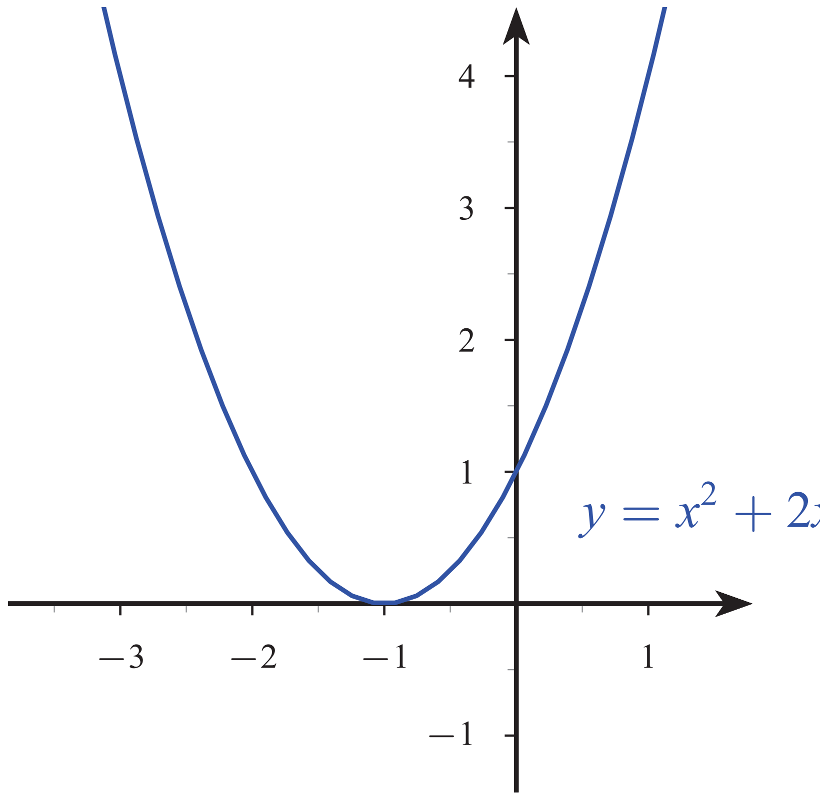
La función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, corta al eje x en dos puntos, pues $\Delta = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0$.



Observamos que los puntos de intersección de la gráfica y el eje X son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$, cuyas primeras coordenadas son las soluciones de la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$

Función cuadrática con $\Delta = 0$

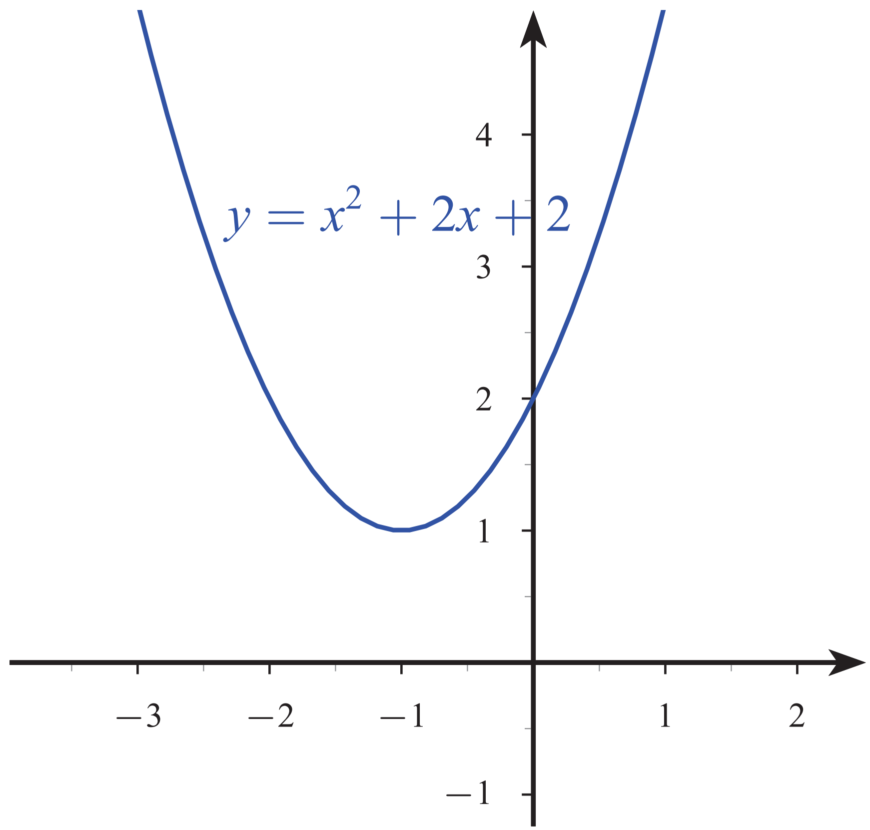
La función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 1$, corta al eje x en un único punto, pues $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$.



El único punto de intersección entre la gráfica de f y el eje X se encuentra en el vértice de la parábola y corresponde al punto $(-1, 0)$, cuya primera coordenada se obtiene resolviendo la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$, o bien $(x + 1)^2 = 0$.

Función cuadrática con $\Delta < 0$

La función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 2$ no corta al eje x, pues
$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$,



Observamos que la gráfica se encuentra siempre por sobre el eje X lo que indica que la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$, no tiene raíces reales.

Observación

Para resolver una ecuación cuadrática, no es necesario recurrir a la fórmula (1)

Ejemplo: Resuelva la ecuación $4x = x^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} 4x = 4x^2 &\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 4 \end{aligned}$$

Observación

Un error frecuente es dividir por x, perdiendo así la solución $x = 0$.

Resolución de ecuaciones cuadráticas

El siguiente desarrollo conlleva un grave error,

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 = 0 &\Rightarrow x^2 + 3x = 10 \\ &\Leftrightarrow x(x+3) = 10 \\ &\Rightarrow x = 0 \ \vee \ x + 3 = 10 \\ &\Rightarrow x = 0 \ \vee \ x = 7 \end{aligned}$$

Observación

Para resolver esta ecuación basta notar que $x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5) = 0$, obteniendo así $x = 2$ o $x = -5$.

La ecuación $(x+1)^2 - x = x^2 + x - 4$ no tiene solución, pues

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 - x &= x^2 + x - 4 \\ 1 &= -4 \end{aligned}$$

Observación

Lo mismo ocurre con $4x(x+5) = 5(4x-5)$, ¿por qué?.

Para la ecuación $(x-4)^2 = 36$, tenemos:

$$\begin{aligned}(x-4)^2 = 36 &\Longrightarrow x-4 = 6 \ \vee \ x-4 = -6 \\ &\Longrightarrow x = 10 \ \vee \ x = -2\end{aligned}$$

Observación

Desarrollando el cuadrado de binomio y utilizando la fórmula (1), obtenemos el mismo resultado.

Problema 1: Resuelva la ecuación

$$\frac{3}{x-1} = \frac{8x}{2x-1}$$

Solución: Suponiendo que $x \neq 1$ y $x \neq \frac{1}{2}$, la ecuación equivale a

$$3(2x-1) = 8x(x-1)$$
$$8x^2 - 14x + 3 = 0$$

Por la fórmula (1), tenemos:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-96}}{16} = \frac{14 \pm 10}{16}$$

obteniendo $x = \frac{3}{2}$ o $x = \frac{1}{4}$.

Problema 2: Demuestre que para todo $p, q \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$x^2 + 2(p+q)x + 2pq = 0,$$

tiene raíces reales.

Solución : Basta estudiar el discriminante de la ecuación cuadrática,

$$\begin{aligned}\Delta &= (2(p+q))^2 - 4(2pq)\\ &= 4(p^2 + 2pq + q^2) - 8pq\\ &= 4p^2 + 4q^2\\ &= 4(p^2 + q^2) \geq 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

luego, las raíces de la ecuación son reales.

Problema 3: Estudie la ecuación

$$px^2 - (p^2+1)x + p = 0$$

para $p \in \mathbb{R}$.
Solución:

1. Si $p = 0$, la ecuación se reduce a $-x = 0$, en donde $x = 0$.
2. Si $p \neq 0$, la ecuación es de segundo grado y sus soluciones están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(p^2+1) \pm \sqrt{(p^2+1)^2 - 4p^2}}{2p} = \frac{(p^2+1) \pm \sqrt{(p^2-1)^2}}{2p} \\ &= \frac{(p^2+1 \pm (p^2-1))}{2p} \end{aligned}$$

obteniendo $x = p$ o $x = \dfrac{1}{p}$.

Problema 1: Resuelva para x, las siguientes ecuaciones:

1. $6\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x-2)$
2. $(x-3)^2 = (x+3)(x-3)$
3. $2(2x-1)^2 - (3x+4)^2 = 1 - (x-5)^2$
4. $\frac{2}{3x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{10} - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{3x-3} + \frac{1}{4x+4} = \frac{1}{12x-12}$

Problemas propuestos

6. $$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{1+x} + \frac{1}{x^2-1} = 0$$
7. $$\frac{5}{x+3} = \frac{7}{2x+3}$$
8. $$\frac{2x}{x-\frac{1}{2}} = \frac{2x-5}{x-\dfrac{1}{3}}$$
9. $$(x+m)^2 - (x+n)^2 = (m-n)^2$$
10. $$\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x+a} = 2$$
11. $$\frac{3}{4}\left(\frac{x}{b} + \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{b} - \frac{x}{a}\right) + \frac{5a+13b}{12a}$$

Problema 2: Despeje

a) R en la ecuación $F = m\dfrac{v^2}{R}$.

b) m en la ecuación $T = 2k\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

c) t en la ecuación $Q = c(t - s)$.

Problema 3: ¿Para qué valores de m las siguientes ecuaciones no tienen solución?.

a) $5mx + 2 = 3m + x$

b) $\dfrac{m(x-2)}{4} - \dfrac{2(mx-1)}{3} = m - 1.$

c) $3(x - m) - 4(mx - 1) = 12$

Problema 4: Se han consumido $\dfrac{7}{8}$ de un bidón de aceite. Reponiendo 38 litros, el bidón queda lleno hasta sus $\dfrac{3}{5}$ partes, ¿Cuál es la capacidad del bidón?.

Problema 5: Resuelva para x las siguientes ecuaciones:

a) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{26}{5}$.

b) $(2x)^2 + (2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 390$.

c) $4x(x+1) = 5x^3$.

d) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{7}{x-2} - \dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

e) $2x^4 + 3x^2 + 2 = 0.$

f) $\dfrac{x-2}{x+1} - \dfrac{x+1}{x+2} = -\dfrac{5}{14}.$

g) $abx^2 + (a^2 - 2b^2)x = 2ab.$

h) $\dfrac{ax^2}{4} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{a}.$

i) $x^3 - 7x + 6 = 0$

Problema 6: Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que una solución de la ecuación

$$(k^2 + 2)x^2 - 7x - 2k = 1$$

sea $x = -\frac{1}{2}$.

Problema 7: Para cerrar un terreno rectangular de $750\,m^2$ se usaron $110\,m$ de cerca. Calcule las dimensiones del terreno.