Clase 1
Números Reales

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Diego Portales

Marzo, 2014

Sistemas numéricos

A través de la historia de la Matemática, los números han sido introducidos como un instrumento para contar o más precisamente para medir.
El sistema numérico más simple es el de los **números naturales**, el cual sirve para contar objetos.

Números Naturales

Los números naturales son infinitos y el conjunto de todos ellos se denota por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

En el conjunto de los números naturales se puede sumar y multiplicar, pero no restar. Para introducir la resta es necesario agregar el cero y los números negativos, obteniéndose así el conjunto de los **números enteros**

Números enteros

El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, sus inversos aditivos y el cero, este conjunto se denota por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

En el conjunto de los números enteros se puede sumar, multiplicar y restar, pero no se puede dividir. Para poder dividir, se agregan las fracciones de números enteros, que constituyen el conjunto de los números racionales, donde se pueden efectuar las cuatro operaciones.

Números racionales

El conjunto de los **números racionales** consiste de todos los números que pueden ser escritos de la forma $\frac{p}{q}$, siendo p y q números enteros y $q \neq 0$, es decir:

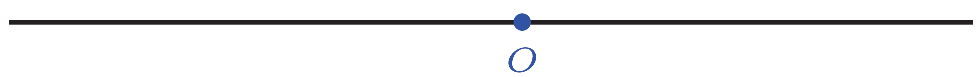
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Los números racionales sirven para contar objetos y partes de objetos, considerando cantidades tanto positivas como negativas.

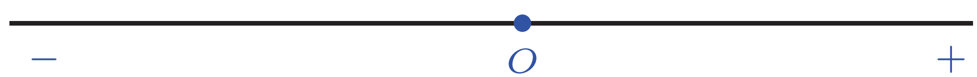
Interpretación geométrica

Desde un punto de vista geométrico, **los números racionales también se pueden asociar a los puntos de una recta** de la siguiente manera:

- Consideremos una recta y un punto O en ella que llameremos origen.



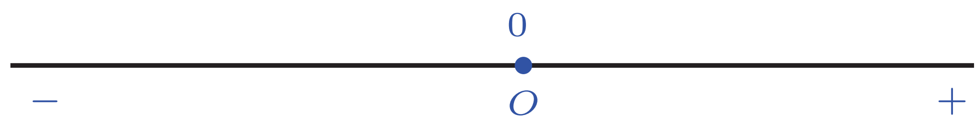
- Elijamos una de las semirectas determinadas por O y llamémosla semirecta positiva.



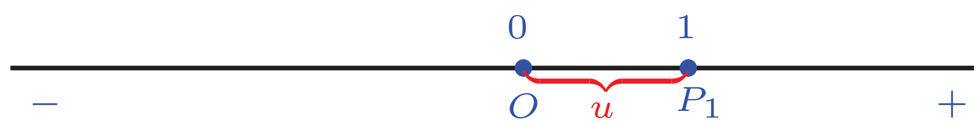
- Finalmente elijamos un trazo que llamaremos **trazo unitario** y que denotaremos por u.

Asociamos a cada número racional x un punto P_x de la recta de la siguiente manera:

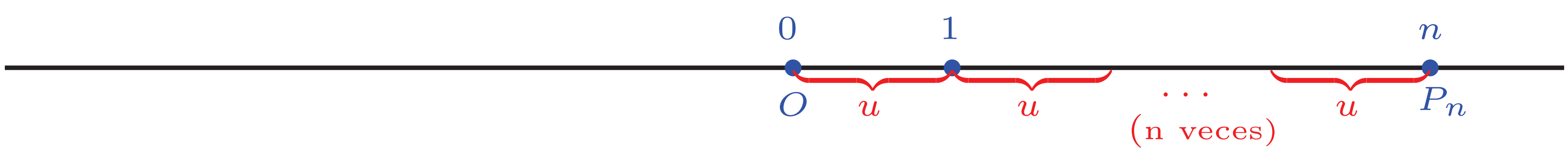
1. Al cero le asignamos el punto O.



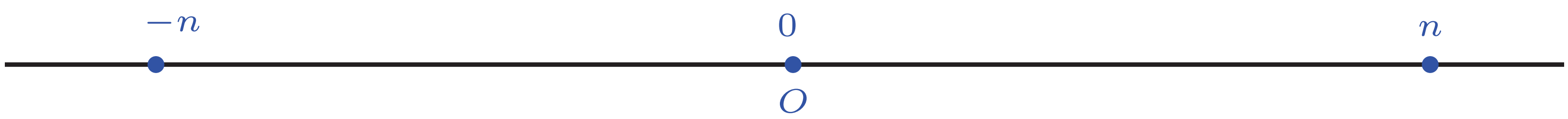
2. Para asignar un punto de la recta al número 1 copiamos el trazo unitario desde O en dirección positiva, determinando el punto P_1



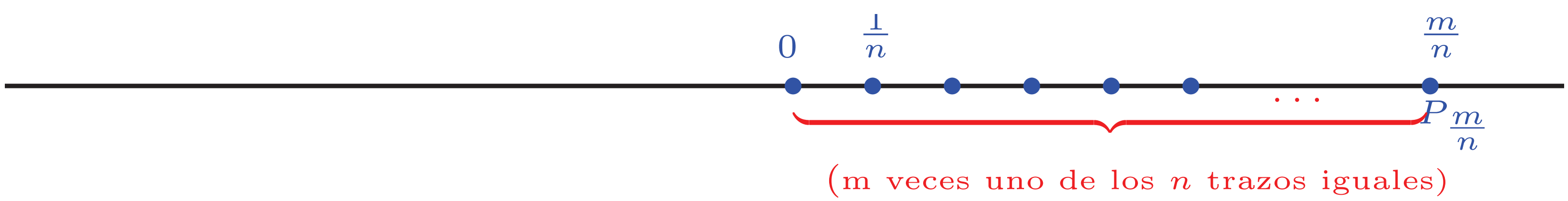
3. Para asignar un punto al número natural n, copiamos el trazo unitario n veces desde el origen en dirección positiva, obteniéndose el punto P_n



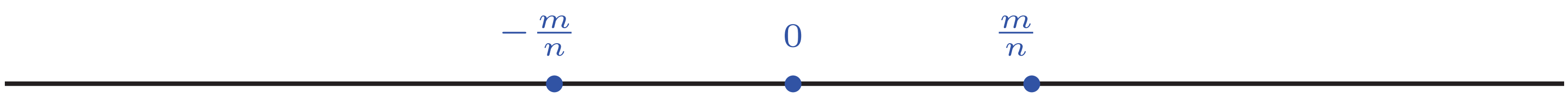
4. Para asignar un punto de la recta al entero negativo $-n$, copiamos el trazo $\overline{OP_n}$ desde O en dirección negativa, determinando el punto P_{-n}.



5. Para asignar un punto de la recta al racional positivo $\dfrac{m}{n}$ (donde m y n son naturales) dividimos el trazo unitario, en n trazos iguales y copiamos uno de los n trazos iguales, m veces desde O en dirección positiva, determinando el punto $P_{\frac{m}{n}}$.



6. Para asignar un punto de la recta al racional negativo $-\dfrac{m}{n}$ (donde m y n son naturales) copiamos el trazo $\overline{OP_{\frac{m}{n}}}$ desde O en dirección negativa, determinando el punto $P_{-\frac{m}{n}}$



Ejercicio

Usando el procedimiento anterior, asignar un punto de la recta al número racional $-\dfrac{5}{2}$.

Observamos que cada número racional x representa la medida del trazo $\overline{OP_x}$ y por lo tanto los números racionales efectivamente sirven para medir algunos trazos dirigidos en la recta numérica.

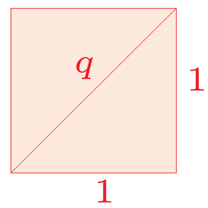
Por otra parte, todo trazo dirigido puede ser copiado sobre la recta numérica determinando un punto sobre ella, entonces surge la pregunta:

Dado un trazo arbitrario, ¿es posible asociar a su medida un número racional?

Si bien todo trazo determina un punto sobre la recta, existen trazos cuyos puntos asociados no se pueden obtener mediante el procedemiento descrito anteriormente, de modo que **su medida no puede ser representada mediante un número racional**, por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado uno.

Un trazo cuya medida no es racional

Consideremos un cuadrado de lado 1 y llamemos q a la medida de su diagonal,



entonces por el teorema de Piatágoras tenemos que

$$q^2 = 1^2 + 1^2,$$

es decir

$$q^2 = 2.$$

Probaremos (por contradicción) que q no puede ser un número racional.

Como hemos visto en el ejemplo anterior, existen trazos que no pueden ser medidos con números racionales, sin embargo pueden ser copiados sobre la recta numérica, determiando en ella puntos que no corresponden a núemros racionales, estos puntos constituyen el conjunto de los números irracionales.

Números irracionales

Los números irracionales son todos aquellos números que no pertenecen al conjunto de los números racionales, es decir, aquellos que no pueden ser expresados como fracción.

Algunos números irracionales son: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e , π , $\ln(2)$, etc.

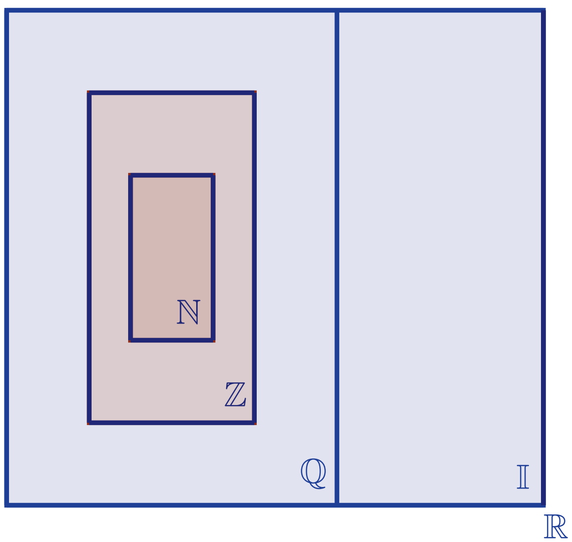
Al agregar números para todos los puntos de la recta, es decir al agregar los números irracionales, se obtiene el conjunto de los números reales.

Los números reales no solo sirven para medir todos los trazos dirigidos sino también para medir todas las áreas y volúmenes.

Números reales

El conjunto de los números reales, es la unión de todos los conjuntos antes vistos, es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, donde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

La relación de contención de estos conjuntos se puede representar de la siguiente manera:



Problema 1:
Ordene de menor a mayor, los números: $\frac{2}{5}, \frac{6}{10}, \frac{7}{15}, \frac{20}{30}$.

Solución:
Buscamos el mínimo común múltiplo entre los denominadores:

$$m.c.m(5, 10, 15, 30) = 30$$

y se amplifica cada fracción, de modo de igualar los denominadores

$$\frac{2}{5} = \frac{12}{30}, \quad \frac{6}{10} = \frac{18}{30}, \quad \frac{7}{15} = \frac{14}{30}, \quad \frac{20}{30}$$

así, los nuevos números son

$$\frac{12}{30}, \quad \frac{18}{30}, \quad \frac{14}{30}, \quad \frac{20}{30}$$

y por lo tanto el orden pedido es

$$\frac{2}{5} < \frac{7}{15} < \frac{6}{10} < \frac{20}{30}$$

Problema 2: Pedro tenía \$18.000 y ha gastado las cuatro décimas partes en libros, dos quintos en películas y un décimo en revistas. ¿Qué fracción de su dinero ha gastado?, ¿cuánto dinero le queda?

Solución:
El dinero se ha gastado en lo siguiente:

- en libros, $\dfrac{4}{10} \cdot 18.000 = 7.200$, es decir \$7.200,
- en películas, $\dfrac{2}{5} \cdot 18.000 = 7.200$, es decir \$7.200,
- en revistas, $\dfrac{1}{10} \cdot 18.000 = 1.800$, es decir \$1.800.

Sumando estos montos se tiene

$$\$7.200 + \$7.200 + \$1.800 = \$16.200,$$

de modo que el dinero que queda es $\$18.000 - \$16.200 = \$1.800$.

Por lo tanto, la fracción que le queda es $\dfrac{1.800}{18.000} = \dfrac{1}{10}$, es decir un décimo del dinero.

Potencias

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define la potencia n-ésima de a, como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \ veces}$$

Si $a \neq 0$, se define $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ y por lo tanto $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Revisemos algunos ejemplos:

1. Determine el valor de $A = \dfrac{27^{-3} \cdot 9^{-8}}{3^{-10}}$
2. Obtenga el valor de $B = \left(\dfrac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^3 \cdot 9^7$
3. Reduzca $\left[1 \div \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]^{-2} + 10 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) \cdot 2^{-2} \cdot \left(-\dfrac{12}{5}\right)$, a la mínima expresión.

Problema 1: En cada una de las siguientes expresiones, descubra dónde está el error.

a) $-5^2 + 1 = 26$,

b) $(3 - \pi)^2 = 9 - \pi^2$,

c) $4 \cdot 3^2 = 144$,

d) $3^2 + 4^2 = 7^2$,

e) $4^2 - 3^2 = 25$.

Raíces

Las raíces son un caso muy especial de potencias, ya que son potencias con exponente fraccionario.

Raíces

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se define la raíz n-ésima de a como $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, de modo que

$$\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow a = b^n$$

Observación: El número natural n se llama índice, y el número real a recibe el nombre de cantidad subradical.

Observe que si n es par, entonces a debe ser mayor o igual que cero. ¿Por qué?

Problema 1: Ordene de menor a mayor los siguientes números $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[5]{2}$.

Solución: Para igualar el índice, se calcula el mínimo común múltiplo entre ellos, es decir, $m.c.m(3,5) = 15$

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[15]{7^5}$$
$$\sqrt[5]{4} = \sqrt[15]{4^3}$$
$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^3}$$

con esto comparamos 7^5, 4^3 y 2^3, de donde el orden de los valores iniciales es $\sqrt[5]{2} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[3]{7}$.

Problema 2: Determine el valor exacto de

a) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64}$

Solución: Descomponiendo en factores primos y usando propiedades de las potencias, tenemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 64} &= \sqrt{2^4 \cdot 7^2 \cdot 2^6} \\ &= \sqrt{2^{10} \cdot 7^2} \\ &= \sqrt{(2^5)^2}\sqrt{7^2} = 2^5 \cdot 7 = 32 \cdot 7 = 224\end{aligned}$$

b) $\sqrt[5]{-32 \cdot 243}$

Solución: Nuevamente utilizando la descomposición en factores primos y propiedades de las potencias, obtenemos

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{-32 \cdot 243} &= \sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[5]{243} \\ &= \sqrt[5]{(-2)^5} \cdot \sqrt[5]{(3)^5} \\ &= (-2)\,(3) = -6\end{aligned}$$

Problema 2: ¿Existe algún impedimento para calcular el valor exacto de la expresión $\sqrt{(-16)\cdot(-36)}$?

Problema 3: Encuentre el valor de la expresión:

$$E = \left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+3^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Problema 4: Siendo $A=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ y $B=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$, determine $A+B$ y AB.

Problema 5 Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2}$,

b) $\dfrac{3\sqrt{27} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Problema 6: Racionalice las expresiones:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2} - 1}$,

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}}$

Problema 7: Dados los números $a = 5 + 2\sqrt{2}$, $b = 5 - 2\sqrt{2}$, pruebe que $(a + b)$ y $\left(a^2 + b^2\right)$ son números enteros.

Problema 8: Determine cuáles de las siguientes igualdades son verdaeras o falsas.

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

b) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

c) $\sqrt{9m+9n} = 3\sqrt{m+n}$,

d) $\sqrt{m} + \sqrt{m} = 2\sqrt{m}$,

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{2x}$.

Problema 9: Simplifique la expresión:

$$E = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{12}} + \left(\frac{1-\frac{1}{3}}{(-1)^3}\right)^2$$